This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

SAMMLUNG VIEWE
TAGESFRAGEN AUS DEN GEBIET
DER NATURWISSENSCHAFTEN
UND DER TECHNIK

SD
D873

Heft 41/42
(Doppelheft)

Erzwungene Schwingung bei veränderlicher Eigenfreque und ihre technische Bedeutu.

Von

Georg Duffing

FRIEDR. VIEWEG & SOHN BRAUNSCHW

Library
of the
University of Wisconsin

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung

Von

Georg Duffing

Ingenieur

Mit 23 Abbildungen

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn

1918

Digitized by Google

Herausgeber dieses Heftes ist
Prof. Dr. Fritz Emde in Stuttgart.

Digitized by Google

. 6107556
354123
MAR 19 1930
SD
D873

Vorwort.

Die Anregung zu der vorliegenden Studie wurde mir zunächst durch Beobachtungen an Maschinen gegeben.

Der Ingenieur, der das Verhalten der von ihm erbauten Maschinen eingehend im Betriebe verfolgt, wird notwendigerweise dazu geführt, den periodischen Bewegungszuständen, die sich vielfach auch unerwartet einstellen, seine volle Aufmerksamkeit zu schenken. Aus dieser Notwendigkeit entstanden seit einer Reihe von Jahren Untersuchungen über die Schwingungen von Maschinen, deren Ergebnis mit der Wirklichkeit übereinstimmte, sofern die Voraussetzung einer vom Ausschlag unabhängigen Eigenfrequenz des dynamischen Systems zutraf.

Einer der hervorstechendsten Punkte dieser Theorie war der Begriff der Resonanz, der streng genommen nur unter der genannten Voraussetzung einen Sinn hat. Ist die Eigenfrequenz des schwingenden Systems nicht konstant, so treten besondere Erscheinungen auf, deren eingehende Erforschung im Interesse der Technik durch die vorliegende Arbeit angebahnt werden soll.

Das einfachste System, bei dem diese Voraussetzung einer konstanten Eigenfrequenz nicht erfüllt ist, dürfte wohl das symmetrische ebene Kreispendel sein, dessen Bewegung seit langer Zeit von hervorragenden Mathematikern studiert worden ist. Die Theorie der freien Pendelschwingungen wurde durch Weierstrass in eine Form gebracht, die in ihrer Einfachheit wohl als unübertrefflich gelten dürfte. Nachdem ich Gelegenheit hatte, diese Materie in einer Vorlesung von Herrn Prof. H. A. Schwarz, „Anwendungen der elliptischen Funktionen", an der Berliner Universität kennen zu lernen, hegte ich die Hoffnung, daß es von dieser Stufe aus kein allzu schwieriger Schritt sein dürfte, zu den Gesetzen der allgemeinen erzwungenen Schwingung, wenigstens für mäßige Ausschläge, zu gelangen. Es war eine Täuschung, das Problem

Digitized by Google

bietet im allgemeinen große Schwierigkeiten, so daß mir di Bewältigung auf rein mathematischem Wege unmöglich war. Ic war gezwungen, mich mit Annäherungen zu behelfen und mein Schlüsse durch den Versuch zu kontrollieren, da auch die Unter suchung über die Konvergenz der angewendeten unendlichen Pro zesse noch nicht abgeschlossen ist. Für die Versuche wurde mi eine kräftige Förderung durch Herrn Prof. Eugen Meyer zutei da er es mir ermöglichte, diese Arbeiten im Festigkeitslaboratoriu der Königl. Techn. Hochschule zu Berlin durchzuführen. Für sein Hilfe durch Rat und Tat sei ihm auch an dieser Stelle gedank

Ich rechne damit, daß die Anwendung elliptischer Funktione die sich für Kontrollrechnungen als zweckmäßig erwies, viele Fachgenossen nicht geläufig sein wird. Die Annäherungsmethode sind deshalb in solcher Breite dargelegt, daß auch Leser, di nicht allzuviel Zeit auf das Studium des Gegenstandes verwende wollen, ein vollständiges Verständnis meiner Resultate erhalte können.

In diesem Falle werden die Entwickelungen des zweiten Teile bis Nr. **10** übergangen, und ferner ist Nr. **14** auszulassen. Di Kontrollrechnungen durch elliptische Funktionen können alsdan durch Annäherungen höherer Ordnung ersetzt werden, die, obwol elementarer Natur, doch nicht weniger mühevoll sein dürften.

Es wäre sehr zu wünschen, daß die Arbeit auch in mathe matischen Kreisen Interesse für den Gegenstand erweckt, der z seiner restlosen Bewältigung anscheinend außerordentliche Hilfs mittel und mehr Zeit beansprucht, als einem Techniker für diese Zweck zur Verfügung steht. Für das Verständnis vieler technische Vorgänge wird die Lösung im vorliegenden Umfange genügen.

Die Methode der sukzessiven Annäherungen, die sic hier als brauchbares Werkzeug bewährt hat, dürfte auch b vielen anderen technischen Problemen gute Dienste leisten.

Den Herren Prof. F. Emde und Prof. K. W. Wagner sprech ich für ihre wertvolle Unterstützung durch Lesen der Korrektu und Beratung meinen besonderen Dank aus.

Berlin-Schöneberg, September 1917.

Georg Duffing.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitende Übersicht 1

I. Die harmonische Schwingung.

1. Allgemeine Lösung der linearen Bewegungsgleichung bei willkürlicher Erregung 7
2. Berücksichtigung der Dämpfung, periodische Erregung 10
3. Zerlegung in erzwungene und freie Schwingung 14
4. Beispiele 17
5. Erregung in Form eines trigonometrischen Polynoms 22

II. Die pseudoharmonische Schwingung.

6. Nichtlineare Gleichungen für die freie und die erzwungene Schwingung 22
7. Darstellung der freien Schwingung durch elliptische Funktionen . . 24

Symmetrischer Fall.

8. Darstellung der freien Schwingung durch elliptische Funktionen . . 25
9. Kleine erzwungene Schwingungen 31
10. Sukzessive Näherungen, zunächst bei linearer Gleichung mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen 35
11. Entsprechende Berechnung der erzwungenen Schwingung bei linearer Gleichung 37
12. Dasselbe bei nichtlinearer Gleichung 39
13. Übergang zur freien Schwingung und Vergleich dieser Näherung mit der strengen Darstellung durch elliptische Funktionen. Zahlenbeispiel (Kreispendel) 44

Unsymmetrischer Fall.

14. Kleine freie Schwingungen, dargestellt durch elliptische Funktionen 47
15. Erzwungene Schwingungen, berechnet durch sukzessive Näherungen 52

Der allgemeine Fall.

16. Erzwungene Schwingung, berechnet durch sukzessive Näherungen . 58
17. Zahlenbeispiel: Kreispendel mit schiefer Gleichgewichtslage 60
18. Genauigkeit, die bei der Näherung erreicht wird 65

Digitized by Google

Ergebnisse. Seite

19. Zusammenstellung der Ergebnisse 70
20. Gegenüberstellung der harmonischen und der pseudoharmonischen Schwingung 74

III. Versuche.

21. Zweck der Versuche 76
22. Versuchseinrichtung 78
23. Die Bewegungsgleichungen des Versuchssystems 80
24. Symmetrisches Pendel 82
25. Unsymmetrisches Pendel 85

IV. Einfluß der Dämpfung.

26. Berücksichtigung der Dämpfung bei der sukzessiven Näherung (symmetrischer Fall) 88

V. Stabilität der Bewegung.

27. Stabilität gegenüber kleinen Störungen 95

VI. Technische Bedeutung der pseudoharmonischen Schwingung.

28. Ausblick auf das Problem des elektrischen Schwingungskreises mit eisenhaltiger Drosselspule 99
29. Anwendung auf die Pendelungen der synchronen Drehstrommaschine 101
30. Zahlenbeispiel, Gefahrpunkt bei unterschwerem Schwungrad . . . 104

VII. Verallgemeinerungen.

31. Erregung mit zwei harmonischen Gliedern von verschiedener Periode 108
32. Periodische Erregung von beliebiger Form, Resonanznähe 112
33. Systeme von mehreren Freiheitsgraden 115

Anhänge.

I. Formeln über elliptische Funktionen 117
II. Zur Integration der elliptischen Differentialgleichung 120
III. Transformation eines Differentialausdrucks nach Schwarz 121
IV. Darstellung der freien Schwingung des Kreispendels nach Schwarz 125
V. Verfahren von W. Ritz 130

Digitized by Google

Einleitende Übersicht.

Die Vorgänge, die sich an wirklichen Gebilden der Technik abspielen, sind in der Regel viel zu verwickelt, als daß ihre genaue Beschreibung durch einfache Mittel möglich wäre. Man hat deshalb, um brauchbare Bilder zu erhalten, auch die schwingenden Systeme idealisiert, d. h. nach dem Vorgang der klassischen Mechanik bei der Theorie der kleinen Schwingungen die Differentialgleichungen so vereinfacht, daß die Lösung sich in einer für technische Zwecke genügend übersichtlichen Gestalt darbot. Die Grundlage dieser Behandlungsweise war die Theorie der harmonischen Schwingung mit ihren überaus einfachen Endergebnissen. Diese Theorie beruht wesentlich auf der Annahme, daß die Kraft, die den schwingenden Körper in die Ruhelage zurückzieht, seiner Auslenkung aus der Ruhelage proportional ist.

Gewisse Anzeichen wiesen jedoch darauf hin, daß etwas an der so gestalteten Theorie keineswegs mit der Wirklichkeit übereinstimmte und daß noch eine Klärung notwendig war: Das Verhalten einer Anzahl synchroner Drehstrommaschinen im Parallelbetrieb, ferner die Erscheinungen am elektromagnetischen Schwingungskreis in Gegenwart von Eisen unter Einwirkung einer aufgedrückten äußeren Spannung; und weiter der Durchgang rasch laufender Maschinen durch ihre kritischen Zustände.

Jene synchronen Drehstrommaschinen waren durch Gasmaschinen angetrieben. Die Frequenz der Antriebsimpulse und die sogenannte Eigenfrequenz waren genügend auseinander, so daß nur mäßige Pendelungen auftraten, wenn die Antriebsmaschinen im Beharrungszustande waren. Wurde dieser Beharrungszustand jedoch nur durch einige wenige heftigere Zündungen gestört, so wurden, auch nachdem die Verbrennung wieder regelmäßig geworden war, die Pendelungen immer noch größer und

Digitized by Google

größer, so daß die Maschinen schließlich außer Tritt kamen. Nach den Ergebnissen der Theorie hätten, nach Eintreten der regelmäßigen Verbrennung, infolge der Dämpfung die Schwingungen im Laufe der Zeit wieder ihre normale Größe erhalten müssen.

Die Angelegenheit blieb zunächst unerklärt, man mußte sich mit der Tatsache abfinden und war bemüht, jede Störung der Verbrennung fern zu halten. Daß die Abweichung von dem Gesetz der harmonischen Schwingung die alleinige Ursache des Mißstandes gewesen sei, soll nicht behauptet werden. Jedenfalls birgt aber diese Abweichung einen Gefahrpunkt in sich, wie in Abschnitt 30, S. 104 näher erläutert werden wird.

Ein elektromagnetischer Schwingungskreis, der durch Hintereinanderschaltung eines Kondensators und einer Drosselspule gebildet wird, ergibt genau die Erscheinungen der harmonischen Schwingung, falls die Drosselspule frei von Eisen ist. Hat die Spule jedoch einen Eisenkern, so werden die Erscheinungen auch qualitativ gänzlich verändert. Vor allen Dingen ist, wie es auch unsere späteren Rechnungen ergeben werden, die Stromstärke keine eindeutige Funktion der aufgedrückten Spannung und Frequenz.

In ausführlicher Weise ist dieser Fall von O. Martienssen behandelt worden[1]). Die von ihm beschriebenen Versuche ergeben folgendes, auf den ersten Anblick merkwürdige Verhalten. Hält man an dem Schwingungskreis die Frequenz der aufgedrückten Spannung konstant und läßt den Effektivwert der Spannung von Null an stetig wachsen, so wird die Abhängigkeit der Stromstärke von der Spannung durch eine gewisse Kurve repräsentiert. Läßt man dagegen die Spannung von dem erreichten höchsten Wert wieder abnehmen, so erhält man eine andere Kurve, die sich nur in gewissen Teilen mit der erstgenannten deckt, so daß in einem bestimmten Gebiete tatsächlich zu derselben Spannung zwei verschiedene Stromstärken als zugehörig nachgewiesen sind. Dieses Verhalten hat seinen Grund lediglich in der Veränderlichkeit der Eigenfrequenz des Systems, denn bei dem eisenfreien Schwingungskreis mit der konstanten Eigenfrequenz

[1]) Physik. Zeitschr. 1910, S. 48: Über neue Resonanzerscheinungen in Wechselstromkreisen.

Digitized by Google

$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ werden alle Vorgänge genau durch die harmonische Schwingung erklärt. Es ist das Verdienst von Martienssen, diese Folgen der veränderlichen Eigenfrequenz zuerst richtig erkannt und ausgesprochen zu haben.

Eine Kraft- oder Arbeitsmaschine ist im Beharrungszustande periodischen elastischen Deformationen unterworfen. Diese Deformationen bilden sich bei gewissen Frequenzen der Antriebsimpulse stärker aus als bei anderen, was gemeinhin als Resonanz oder kritischer Betriebszustand der Maschine bezeichnet wird.

Nach der jetzt herrschenden Theorie dieser Erscheinungen dürfte die Maschine bei einer Geschwindigkeit nahe über der kritischen und nahe darunter kein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen. In den meisten Fällen jedoch ist der Betrieb viel ruhiger über Resonanz als in der gleichen Entfernung unter Resonanz. Die Ursache dieser Abweichung von der Theorie ist auch hier die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Amplitude.

Die Veränderlichkeit der Eigenfrequenz ist ein Ergebnis der Bewegungsgleichungen des Systems, folglich müssen sich die Erscheinungen auch an einfachen mechanischen Systemen verfolgen lassen, deren Aufbau und Bewegungsgleichungen veränderliche Eigenfrequenz ergeben.

In dieser Beziehung bot sich als einfachstes System das ebene Kreispendel dar, dessen Bewegung seit Jahren Gegenstand des Studiums der Mathematiker gewesen ist, allerdings nur, soweit es sich um freie Schwingungen handelt; bei den erzwungenen Schwingungen beschränkte man sich auf unendlich kleine Amplituden.

Da beim Pendel alle unendlich kleinen Schwingungen dieselbe Frequenz $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ unabhängig von der Amplitude besitzen, so dürfte nach der Theorie der harmonischen Schwingung bei einer Erregung von derselben Frequenz ein periodischer Bewegungszustand nicht möglich sein, die Amplituden müßten mit der Zeit unbegrenzt wachsen. In der Tat wachsen in diesem Falle die Amplituden zunächst; aber damit ist eine Abnahme der Eigenfrequenz verbunden, das Pendel geht sozusagen der Resonanz

Digitized by Google

aus dem Wege und ermöglicht auf diese Weise wieder einen periodischen Bewegungszustand bei der Erregerfrequenz $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$. Würde man, kinematisch gesprochen, unter Beibehaltung der jetzt auftretenden Amplitude die Antriebsfrequenz erniedrigen und auf diese Weise wieder Resonanz herbeizuführen suchen, so würde das Pendel durch weitere Vergrößerung des Ausschlags der Resonanz ausweichen.

Geht man jedoch mit der Antriebsfrequenz über den Betrag von $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$ hinaus, so stellt sich eine Amplitude ein, die mit der aus der Theorie der harmonischen Schwingung folgenden sehr nahe übereinstimmt und bei weiterer Erhöhung der Antriebsfrequenz stets abnimmt.

Aus diesen rein qualitativen Betrachtungen geht schon der Unterschied zwischen den Zuständen unter und über Resonanz beim Pendel hervor. Die rechnerische Untersuchung hat für alle Systeme derselben Struktur (veränderliche Eigenfrequenz) folgende Eigenschaften der „pseudoharmonischen Schwingung“, wie sie fortan bezeichnet sei, ergeben:

1. Bei Übereinstimmung von Antriebsfrequenz mit der Frequenz der kleinen Schwingungen (Resonanz) stellt sich ein periodischer Bewegungszustand mit endlicher Amplitude ein.

2. Bei der harmonischen Schwingung tritt unter obiger Voraussetzung eine Phasenverschiebung von einer Viertelperiode zwischen Erregung und Ausschlag auf. Bei der pseudoharmonischen Schwingung ist dies nicht mehr der Fall, selbst wenn man einfach harmonische Erregung voraussetzt und nur die erste Harmonische des Ausschlages in Rücksicht zieht.

3. Der Ausschlag bei der stationären Schwingung ist keine eindeutige Funktion der Frequenz und Größe der Erregung.

Ist die Frequenz der Erregung kleiner als die Eigenfrequenz der kleinen Schwingungen und steigert man, von der kleinen Schwingung ausgehend, die Größe der Erregung, so wächst der Ausschlag stetig mit der Erregung, bis bei einer gewissen Erregung der Ausschlag auf einen höheren Wert springt. Bei einer Erregung unter diesem kritischen, zu einer bestimmten Frequenz gehörigen Werte wird die Amplitude nicht eindeutig durch die

Digitized by Google

Erregung bestimmt. Zu einer bestimmten Erregung gehören im allgemeinen mehrere periodische Bewegungszustände, von denen einige stabiles, die anderen labiles Verhalten zeigen.

Für eine Erregung, die größer ist als jener kritische Wert, ist die Amplitude eindeutig bestimmt.

Die rechnerische Verfolgung der Schwingungsvorgänge bei Systemen dieser Art (die Mehrzahl aller wirklichen schwingungsfähigen Systeme) begegnet in ihrer allgemeinsten Form großen Schwierigkeiten. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich daher auf die Behandlung der für die Technik wichtigen periodischen Vorgänge (der stationären oder permanenten Schwingungen).

Die auf die freien Schwingungen bezüglichen Resultate sind nicht neu und ergeben sich durch einfache Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen. Die erzwungenen Schwingungen können bis heute nur durch sukzessive Näherungen, allerdings mit jedem gewünschten Genauigkeitsgrad, dargestellt werden.

Was die Anordnung des Stoffes anbelangt, so wurde der Vollständigkeit halber im Abschnitt I die unverkürzte Differentialgleichung der harmonischen Schwingung behandelt, und zwar in einer Form, die noch nicht in weiten Kreisen bekannt zu sein scheint.

Abschnitt II ist der pseudoharmonischen Schwingung gewidmet.

Die Konvergenz der benutzten Näherungsprozesse wurde nicht untersucht; da hierfür anscheinend sehr viel umfangreichere Arbeiten notwendig sind, wurde diese Untersuchung auf eine spätere Gelegenheit verschoben. Die Prüfung der Rechnungsergebnisse durch primitive Versuchseinrichtungen nach Abschnitt III hat bis jetzt Widersprüche nicht ergeben, eine genaue Bestätigung durch Versuche mit Präzisionsapparaten ist wünschenswert und läßt hoffentlich nicht zu lange auf sich warten.

Die auffallende Erscheinung, daß bei Eintritt der Resonanz keine Phasenverschiebung von einer Viertelperiode hervortrat, gab Veranlassung zur Untersuchung des Einflusses der Dämpfung, wenigstens für den symmetrischen Fall in Abschnitt IV.

Die Ausführungen über Stabilität in Abschnitt V sollen nur dazu dienen, die Schwierigkeiten dieser Frage, die restlos erst

Digitized by Google

beim Vorliegen der allgemeinen Lösung beantwortet werden kann, vor Augen zu führen.

Über die älteren Bearbeitungen unseres Gegenstandes ist folgendes zu sagen: Die Untersuchung der freien pseudoharmonischen Schwingung kann durch die Weierstrasssche Theorie der elliptischen Funktionen als abgeschlossen gelten.

Ein ausführlicher Nachweis sonstiger Arbeiten über freie Schwingungen findet sich im „Repertorium der Physik“ von R. H. Weber und R. Gans, Bd. I, S. 205, Leipzig 1915, wo auch die Arbeit von J. Horn[1]) in ihren Hauptzügen wiedergegeben ist. Von den übrigen Arbeiten ist bemerkenswert für unsere Zwecke die Arbeit von F. Braun[2]). Braun beschreibt die freien Schwingungen durch Jacobische elliptische Funktionen, ein Weg, den neuerdings Biermanns[3]) angetreten hat.

Über erzwungene Schwingungen liegt wenig vor: Die Arbeit von Rayleigh[4]), die sich auf die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 = E\cos pt + F\cos(qt - \varepsilon)$$

bezieht, gibt ein unrichtiges Resultat, das für $p = \sqrt{\alpha}$ oder $q = \sqrt{\alpha}$ sinnlos wird. Der Grund ist, daß das als erste Näherung genommene Resultat 2) im Falle $p = \sqrt{\alpha}$ oder $q = \sqrt{\alpha}$ keine Näherung ist.

C. Schäfer hat in seiner „Einführung in die theoretische Physik“[5]) dieselbe Gleichung behandelt; die Lösung ist ebenfalls unhaltbar, da auch dort alle Näherungsfunktionen bei Übereinstimmung der erzwungenen Frequenz mit der Eigenfrequenz der unendlich kleinen Schwingungen sinnlos werden [S. 145, Gl. 124) bis 128)]. Ebensowenig kann die Gl. 121), S. 144 für die freien Schwingungen aufrecht erhalten werden, da sich bei ihrer Integration die Näherungsfunktion φ_2 als nicht periodisch herausstellt.

Die vorliegende Arbeit macht keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie ist der Versuch, unbekanntes Gebiet durch Behandlung

---

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. **47**, 400 (1902) und **49**, 246 (1903).

[2]) Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. **151**, 51 u. 250 (1874).

[3]) Arch. f. Elektrotechn., Bd. III, Heft 12, S. 345 (1915): Der Schwingungskreis mit eisenhaltiger Induktivität.

[4]) Theory of Sound, 2. Aufl., Bd. 2, S. 79. London, bei Macmillan & Co., 1894.

[5]) Leipzig, Veit & Co., 1914.

Digitized by Google

von Einzelfragen zu erschließen, die schließlich im Zusammenhang in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung ihre Beantwortung finden sollten. Ob die Schwierigkeiten, die sich der allgemeinen Lösung entgegenstellen, so groß sind, daß dieses Ziel nicht in absehbarer Zeit erreicht werden kann, wird sich erst bei weiterem Vordringen finden. Dazu bedarf es der Mitarbeit von anderer Seite sowohl auf experimentellem wie rechnerischem Gebiete, und der Wunsch, daß diese möglichst zeitig einsetzen möge, war die Veranlassung, die Arbeit, wenn auch unvollendet, der wissenschaftlichen Technik zu unterbreiten.

I. Die harmonische Schwingung.

1. Technische Schwingungsprobleme werden in den meisten Fällen auf die harmonische Schwingung zurückgeführt, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = R(t) \qquad 1)$$

beschrieben wird. Hierin bedeutet x die Maßzahl für die Entfernung des schwingenden Elementes aus der Gleichgewichtslage, t die Maßzahl für die Zeit, α eine Konstante, die von der Beschaffenheit des Systems abhängt, und $R(t)$ eine Funktion der Zeit, die den Verlauf der äußeren Kraft (Erregung) darstellt.

Die Restitutionskraft, die durch das Glied αx dargestellt wird, ist genau proportional der Entfernung aus der Mittellage. Entspricht die Natur des Systems dieser Bedingung, dann gilt die Lösung von 1) für jede beliebige Größe des Ausschlages. Ist die Bedingung nicht erfüllt, so nimmt man an, daß bei Beschränkung auf kleine Ausschläge die Lösung von 1) Resultate ergibt, die wenigstens annähernd der Wirklichkeit entsprechen. Gegenüber quantitativen Abweichungen der Rechnungsergebnisse von nicht übertriebener Größe (etwa 10 bis 20 Proz.) ist dieser Standpunkt der Techniker vollkommen gerechtfertigt. Die allgemeine Lösung der Gleichung 1) ist so einfach, daß es vom technischen Standpunkte verkehrt wäre, einer geringfügigen quantitativen Verbesserung halber, die Abweichung der Restitutions-

Digitized by Google

kräfte von dem Proportionalitätsgesetz in Rücksicht zu ziehen. Bei nicht-linearen Restitutionskräften zeigen sich jedoch in der Nähe der als Resonanz bezeichneten Zustände qualitativ neue eigenartige Erscheinungen, die eine scharfe Unterscheidung von der harmonischen Schwingung begründen.

Es dürfte daher zweckmäßig sein, unserer Hauptuntersuchung die allgemeine Lösung der Gleichung 1) voranzustellen, besonders da diese in den Kreisen der Ingenieure nicht so allgemein bekannt zu sein scheint, wie sie es verdient.

Allgemein bekannt ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = 0 \qquad 2)$$

$$x = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t \qquad 3)$$

wo A und B willkürliche Konstanten bedeuten und der Kürze halber $\sqrt{\alpha}$ durch den Buchstaben λ ersetzt ist.

Aus der Lösung 3) erhält man eine Lösung der vollständigen Gleichung 1) nach der Methode der Variation der Konstanten, d. h. man betrachtet A und B als Funktionen von t, die so bestimmt werden, daß die Lösung 3) der Differentialgleichung 1) genügt. Bezeichnet man die Differentialquotienten nach der Zeit folgendermaßen:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dA}{dt} = \dot{A}, \quad \frac{dB}{dt} = \dot{B},$$

so folgt aus 3):

$$\dot{x} = \lambda[-A\sin\lambda t + B\cos\lambda t] + \dot{A}\cos\lambda t + \dot{B}\sin\lambda t.$$

Wie bekannt, wird dann die Festsetzung

$$\dot{A}\cos\lambda t + \dot{B}\sin\lambda t = 0 \qquad 4)$$

getroffen. Dann wird

$$\ddot{x} = -\lambda^2[A\cos\lambda t + B\sin\lambda t] + \lambda[-\dot{A}\sin\lambda t + \dot{B}\cos\lambda t].$$

Durch Einsetzen in 1) sieht man, daß der fett gedruckte Ausdruck die linke Seite zu Null macht, und es bleibt von A und B als zweite Bedingung zu erfüllen:

$$-\dot{A}\sin\lambda t + \dot{B}\cos\lambda t = \frac{R(t)}{\lambda} \qquad 5)$$

Digitized by Google

Aus 4) und 5) folgt:

$$\dot{A} = -\frac{1}{\lambda}\sin\lambda t \cdot R(t), \quad \dot{B} = \frac{1}{\lambda}\cos\lambda t \cdot R(t) \qquad 6)$$

Hieraus folgt:

$$A = -\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} R(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi, \quad B = \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} R(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi \qquad 7)$$

wo t_0 einem willkürlichen, aber festen Zeitpunkt entspricht, und ξ die Integrationsvariable bedeutet, die das Intervall t_0 bis t durchläuft.

Durch Einführung der Funktionen 7) in 3) erhält man:

$$x = \frac{1}{\lambda}\left\{-\cos\lambda t\int_{t_0}^{t} R\sin\lambda\xi\, d\xi + \sin\lambda t\int_{t_0}^{t} R\cos\lambda\xi\, d\xi\right\}$$

oder

$$x = \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\, d\xi.$$

Diesem Ausdruck kann noch die allgemeine Lösung von 2) angehängt werden, so daß man erhält:

$$x = C_1\cos\lambda t + C_2\sin\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\, d\xi \qquad 8)$$

als allgemeine Lösung von 1) mit den willkürlichen Konstanten C_1 und C_2.

Aus 8) folgt:

$$\dot{x} = \lambda[-C_1\sin\lambda t + C_2\cos\lambda t] + \int_{t_0}^{t} R(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\, d\xi \qquad 9)$$

Wird als Anfangsbedingung festgesetzt:

$$x = x_0 \qquad \frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 \text{ für } t = t_0,$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= x_0\cos\lambda t_0 - \frac{1}{\lambda}\dot{x}_0\sin\lambda t_0 \\ C_2 &= x_0\sin\lambda t_0 + \frac{1}{\lambda}\dot{x}_0\cos\lambda t_0 \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

Digitized by Google

Im speziellen Falle $t_0 = 0$ ist

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\lambda} \qquad 10\,a)$$

2. Die Resultate 8) bis 10) sind sogar in allgemeinerer Form als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \chi \frac{dx}{dt} + \alpha x = R(t) \qquad 11)$$

der gedämpften Schwingung seit langer Zeit bekannt[1]). Sie werden wenig benutzt[2]), weil man meistens mit $R(t) = k \sin \omega t$ auszukommen sucht, oder mit einer Fourierschen Reihe operiert. Für gewisse Formen von $R(t)$ ist aber die Fouriersche Reihe, selbst wenn die Funktion R die Entwickelung in eine solche zuläßt, nicht zweckmäßig, wie schon Emde in seiner zitierten Arbeit auseinandergesetzt hat; denn unter Umständen muß man sehr viele Glieder der Reihe summieren, bis man die Eigenschaften der Lösung erkennt. Insbesondere ist in der Nähe einer Sprungstelle die Konvergenz viel schlechter als an den Stellen, wo die Funktion und ihre Ableitungen sich stetig verhalten. Fouriersche Reihen mit ungleichmäßiger Konvergenz erscheinen auch bei technischen Problemen; bei Integrationen muß das Integrationsintervall so gewählt werden, daß innerhalb desselben die Reihe gleichmäßig konvergiert.

Die Lösung unter Verwendung einer Fourierschen Reihe für $R(t)$ hat den Vorzug, daß die erzwungene Schwingung getrennt für sich erscheint, während dies bei der Lösung 8) nicht der Fall ist.

Wenn R die Periode τ besitzt, derart, daß

$$R(t + \tau) = R(t),$$

so kann man das Resultat 8) so umformen, daß die Teile mit der Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$ und der Periode τ getrennt erscheinen. Um dieses Ziel zu erreichen, geht man zweckmäßig von der Differentialgleichung der gedämpften Schwingung 11) aus.

Mit der Bezeichnung

$$\lambda = \sqrt{\alpha - \frac{\chi^2}{4}} \qquad 12)$$

[1]) Vgl. Rayleigh, Theory of sound, II^{d} ed., Vol. I, p. 74.

[2]) Vgl. Emde, Elektrotechnik u. Maschinenbau, 11. u. 25. Dez. 1910.

Digitized by Google

erhält man auf genau demselben Wege wie bei 1) die allgemeine Lösung[1]) mit den beiden willkürlichen Konstanten C_1 und C_2:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 e^{-\frac{\chi}{2}t}\cos\lambda t + C_2 e^{-\frac{\chi}{2}t}\sin\lambda t \\ &+ \frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} R(\xi)\, e^{-\frac{\chi}{2}(t-\xi)}\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda}e^{\frac{\chi}{2}t_0}\left[x_0\left(\lambda\cos\lambda t_0 - \frac{\chi}{2}\sin\lambda t_0\right) - \dot{x}_0\sin\lambda t_0\right] \\ C_2 &= \frac{1}{\lambda}e^{\frac{\chi}{2}t_0}\left[x_0\left(\frac{\chi}{2}\cos\lambda t_0 + \lambda\sin\lambda t_0\right) + \dot{x}_0\cos\lambda t_0\right] \end{aligned}\right\} \quad 13\,a)$$

Für unbegrenzt wachsende t verschwinden die mit den willkürlichen Konstanten behafteten Glieder, ebenso wenn man $t_0 = -\infty$ annimmt. Es ergibt sich dann:

$$x = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{t} R(\xi)\, e^{-\frac{\chi}{2}(t-\xi)}\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi \quad 14)$$

$$\dot{x} = -\frac{\chi}{2}x + \int_{-\infty}^{t} R(\xi)\, e^{-\frac{\chi}{2}(t-\xi)}\cos\lambda(t-\xi)\,d\xi \quad 15)$$

Im Falle eines periodischen R mit der Periode τ, wie jetzt angenommen werde, substituieren wir in 14)

$$t - \xi = \zeta$$

und erhalten

$$x = \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\infty} R(t-\zeta)\, e^{-\frac{\chi}{2}\zeta}\sin\lambda\zeta\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\int_{0}^{\tau}\cdots d\zeta + \int_{\tau}^{2\tau}\cdots d\zeta + \int_{2\tau}^{3\tau}\cdots d\zeta + \cdots\right].$$

Nun ist

$$\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} R(t-\zeta)\, e^{-\frac{\chi}{2}\zeta}\sin\lambda\zeta\,d\zeta$$

$$= \int_{0}^{\tau} R(t-n\tau-u)\, e^{-\frac{\chi}{2}(n\tau+u)}\sin\lambda(n\tau+u)\,du,$$

wenn $\zeta = n\tau + u$ gesetzt wird.

[1]) Vgl. Emde, Elektrotechnik u. Maschinenbau, Dezember 1910, S. 1067.

Digitized by Google

Da aber

$$R(t-n\tau-u) = R(t-u),$$

so folgt für das letzte Integral der Ausdruck:

$$e^{-\frac{\chi}{2}n\tau}\sin n\lambda\tau\int_0^\tau R(t-u)\,e^{-\frac{\chi}{2}u}\cos\lambda u\,du$$

$$+\,e^{-\frac{\chi}{2}n\tau}\cos n\lambda\tau\int_0^\tau R(t-u)\,e^{-\frac{\chi}{2}u}\sin\lambda u\,du.$$

Benutzt man die Abkürzungen

$$S=\int_0^\tau R(t-u)\,e^{-\frac{\chi}{2}u}\sin\lambda u\,du,\quad S_1=\int_0^\tau R(t-u)\,e^{-\frac{\chi}{2}u}\cos\lambda u\,du, \tag{16}$$

wobei S und S_1 periodische Funktionen von t mit der Periode τ sind, so folgt:

$$\lambda.x = S\left[1+e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau+e^{-\frac{\chi}{2}\cdot 2\tau}\cos 2\lambda\tau+\cdots\right]$$
$$+\,S_1\left[e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\sin\lambda\tau+e^{-\frac{\chi}{2}\cdot 2\tau}\sin 2\lambda\tau+\cdots\right].$$

Ersetzt man innerhalb der Klammern die Kreisfunktionen durch ihre Exponentialausdrücke

$$\cos\lambda\tau=\frac{e^{i\lambda\tau}+e^{-i\lambda\tau}}{2},\qquad \sin\lambda\tau=\frac{e^{i\lambda\tau}-e^{-i\lambda\tau}}{2i},$$

so erhält man durch Summation der entstehenden unendlichen geometrischen Reihen:

$$1+e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau+e^{-\frac{\chi}{2}\cdot 2\tau}\cos 2\lambda\tau+\cdots$$
$$=\frac{1-e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau}{1-2e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau+e^{-\chi\tau}}=\frac{e^{\frac{\chi}{2}\tau}-\cos\lambda\tau}{2\left(\mathfrak{Cof}\frac{\chi}{2}\tau-\cos\lambda\tau\right)},$$

$$e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\sin\lambda\tau+e^{-\frac{\chi}{2}\cdot 2\tau}\sin 2\lambda\tau+\cdots$$
$$=\frac{e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\sin\lambda\tau}{1-2e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau+e^{-\chi\tau}}=\frac{\sin\lambda\tau}{2\left(\mathfrak{Cof}\frac{\chi}{2}\tau-\cos\lambda\tau\right)}.$$

Beide Reihen sind konvergent für jedes (noch so kleine) positive χ, divergieren dagegen für $\chi=0$. Doch behalten die rechten Seiten auch für $\chi=0$ ihren Sinn.

Digitized by Google

Durch Benutzung dieser Resultate ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\left[1-2e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau+e^{-\chi\tau}\right]\cdot x\\&=\left[1-e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau\right]S+e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\sin\lambda\tau\cdot S_1\end{aligned}\right\}\quad 17)$$

oder

$$2\lambda\left[\mathfrak{Cof}\tfrac{1}{2}\chi\tau-\cos\lambda\tau\right]\cdot x=\left[e^{\frac{1}{2}\chi\tau}-\cos\lambda\tau\right]S+\sin\lambda\tau\cdot S_1\quad 17\,a)$$

Vermittelst der Substitution $t-u=v$ kann man die Ausdrücke 16) auch in der Form darstellen:

$$\left.\begin{aligned}S&=\int_{t-\tau}^{t}R(v)\,e^{-\frac{\chi}{2}(t-v)}\sin\lambda\,(t-v)\,dv,\\S_1&=\int_{t-\tau}^{t}R(v)\,e^{-\frac{\chi}{2}(t-v)}\cos\lambda\,(t-v)\,dv\end{aligned}\right\}\quad 18)$$

Durch Differentiation von 18) nach t erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dt}&=-R(t)\,e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\sin\lambda\tau-\frac{\chi}{2}S+\lambda S_1,\\\frac{dS_1}{dt}&=R(t)\cdot\left[1-e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau\right]-\lambda S-\frac{\chi}{2}S_1\end{aligned}\right\}\quad 18\,a)$$

und damit ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\left[1-2e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau+e^{-\chi\tau}\right]\dot{x}\\&=-S\left[\frac{\chi}{2}\left(1-e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau\right)+\lambda e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\sin\lambda\tau\right]\\&\quad+S_1\left[\lambda\left(1-e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\cos\lambda\tau\right)-\frac{\chi}{2}e^{-\frac{\chi}{2}\tau}\sin\lambda\tau\right]\end{aligned}\right\}\quad 18\,b)$$

Die Integraldarstellungen 13), 17), 18) der Lösung von 11) legen der periodischen Funktion $R(t)$ wenige Beschränkungen auf, sie kann stetig oder abteilungsweise stetig sein, es genügt, daß sie integrierbar ist.

Für eine spezielle Form der Funktion $R(t)$ hat Emde[1]) die Lösung der Gleichung 11) gegeben. Die allgemeinen Resultate 17) und 18), die für eine beliebige periodische Funktion $R(t)$ die periodische Lösung darstellen, dürften neu sein.

[1]) Elektrotechnik u. Maschinenbau 1910, S. 1070.

Digitized by Google

3. Wir wenden uns nun wieder zu unserer Gleichung 1) mit der allgemeinen Lösung 8), d. h. zu dem Fall $\chi = 0$.

Für einen sehr kleinen Wert von χ ist die Gleichung 11) sehr wenig verschieden von 1), und die Lösung 17) nähert sich der Grenze

$$x = \frac{1}{2\lambda}\left[S + \frac{\sin\lambda\tau}{1-\cos\lambda\tau}\,S_1\right], \qquad 19)$$

wo $S = \int_{t-\tau}^{t} R(v)\sin\lambda(t-v)\,dv, \quad S_1 = \int_{t-\tau}^{t} R(v)\cos\lambda(t-v)\,dv$

und $\lambda = \sqrt{\alpha}$.

Die Werte von S und S_1 erleiden keine Änderung, wenn man darin die unabhängige Variable t durch $t+\tau$ ersetzt, es sind also periodische Funktionen mit der Periode τ.

Wir zeigen nun, daß sich der Betrag 19), der die Periode τ besitzt, von der Lösung 8) abtrennen läßt und daß der übrig bleibende Teil von 8) die Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$ hat, so daß also 19) tatsächlich die erzwungene Schwingung von 1) darstellt.

Es ist zunächst:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi \\ &= \int_{t-\tau}^{t} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi - \int_{t-\tau}^{t_0} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\tau} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi - \int_{t}^{t_0+\tau} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

Führt man die Bezeichnungen

$$U = \int_{t_0}^{t_0+\tau} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi, \quad U_1 = \int_{t_0}^{t_0+\tau} R(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\,d\xi \qquad 21)$$

ein, so sind U und U_1 Funktionen von t mit der Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Durch Vergleich der rechten Seiten von 20) folgt dann:

$$S - U = \int_{t-\tau}^{t_0} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi - \int_{t}^{t_0+\tau} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi.$$

Substituiert man im ersten Integral

$$\xi = v - \tau, \quad R(v-\tau) = R(v),$$

Digitized by Google

so folgt:

$$S - U = (\cos\lambda\tau - 1)\int_{t}^{t_0+\tau} R(v)\sin\lambda(t-v)\,dv + \sin\lambda\tau\int_{t}^{t_0+\tau} R(v)\cos\lambda(t-v)\,dv.$$

Behandelt man

$$\int_{t_0}^{t} R(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\,d\xi$$

in derselben Weise, so erhält man:

$$S_1 - U_1 = -\sin\lambda\tau\int_{t}^{t_0+\tau} R(v)\sin\lambda(t-v)\,dv + (\cos\lambda\tau - 1)\int_{t}^{t_0+\tau} R(v)\cos\lambda(t-v)\,dv.$$

Hieraus ergibt sich umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned}\int_{t}^{t_0+\tau} R(v)\sin\lambda(t-v)\,dv &= -\frac{1}{2}(S-U) - \frac{1}{2}\frac{\sin\lambda\tau}{1-\cos\lambda\tau}(S_1-U_1)\\ \int_{t}^{t_0+\tau} R(v)\cos\lambda(t-v)\,dv &= \frac{1}{2}\frac{\sin\lambda\tau}{1-\cos\lambda\tau}(S-U) - \frac{1}{2}(S_1-U_1)\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Mit Rücksicht auf 20) folgt dann:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t} R(\xi)\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}\frac{\sin\lambda\tau}{1-\cos\lambda\tau}U_1 + \frac{1}{2}\left[S + \frac{\sin\lambda\tau}{1-\cos\lambda\tau}S_1\right]\end{aligned}\right\} \quad 23)$$

Die Zerlegung unserer Lösung 8) in einen Teil mit der Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$ und einen Teil mit der Periode τ der Funktion $R(t)$, also in freie und erzwungene Schwingung, ist hiermit durchgeführt.

Der Formel 23) kann man noch an die Seite stellen:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t} R(\xi)\cos\lambda(t-\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{2}\frac{\sin\lambda\tau}{1-\cos\lambda\tau}U + \frac{1}{2}\left[S_1 - \frac{\sin\lambda\tau}{1-\cos\lambda\tau}S\right]\end{aligned}\right\} \quad 24)$$

Führt man das Ergebnis 23) in Formel 8) ein, so sieht man, daß im Falle eines periodischen $R(t)$ die vollständige Lösung unserer Differentialgleichung aus drei Teilen besteht, die durch verschiedene Ursachen bestimmt werden:

Digitized by Google

Anteil I von der Form

$$C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t$$

hängt (außer von den Koeffizienten der Differentialgleichung) nur von dem Anfangszustand, d. h. von den Größen x_0, $\dot{x}_0$ und t_0 ab.

Anteil II von der Form

$$\frac{1}{2\lambda}\left[U - \cot\frac{\lambda\tau}{2} \cdot U_1\right]$$

hängt nur von R und t_0 ab.

Sowohl I wie II stellen einfache harmonische Bewegungen von der Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$ dar, und ihre Summe ergibt die freie Schwingung.

Der Anteil III von der Form

$$\frac{1}{2\lambda}\left[S + \cot\frac{\lambda\tau}{2} S_1\right]$$

hängt nur von R ab und hat die Periode τ wie $R(t)$. Er stellt aber im allgemeinen keine einfache harmonische Bewegung dar und führt den Namen „erzwungene Schwingung". Er kann nach den gegebenen Formeln mit jeder gewünschten Annäherung ohne Schwierigkeit berechnet werden, falls R endlich bleibt; für die arithmetische oder graphische Darstellung gibt man ihm besser die Form

$$\frac{1}{2\lambda \sin\frac{\lambda\tau}{2}}$$

$$\times \left[\sin\lambda t \int_{t-\tau}^{t} R(v) \sin\lambda\left(v + \frac{\tau}{2}\right) dv + \cos\lambda t \int_{t-\tau}^{t} R(v) \cos\lambda\left(v + \frac{\tau}{2}\right) dv\right],$$

bei der die Integranden einer bequemen graphischen Darstellung zugänglich sind, was bei der Form 19) nicht der Fall ist.

Durch eine einfache Rechnung erhält man die folgenden Darstellungen, für Anteil II

$$-\frac{1}{2\lambda \sin\frac{\lambda\tau}{2}} \int_{t_0}^{t_0+\tau} R(u) \cos\lambda\left(t - u + \frac{\tau}{2}\right) du \qquad 23\,a)$$

Digitized by Google

und für Anteil III

$$\frac{1}{2\lambda \sin\frac{\lambda\tau}{2}} \int_{t}^{t+\tau} R(u) \cos\lambda\left(t-u+\frac{\tau}{2}\right) du. \qquad 23\,b)$$

Die Summe aus Anteil II und Anteil III stellt ein partikulares Integral unserer vollständigen Differentialgleichung dar, das für $\dot{t} = t_0$ zugleich mit seiner ersten Ableitung verschwindet. Man nennt es nach Fuchs das zum Punkt $t = t_0$ gehörige Hauptintegral der Differentialgleichung.

Der Anteil II ist die freie Schwingung, wenn $x_0 = 0$ und $\dot{x}_0 = 0$ ist, und verschwindet selbst zugleich mit R. Er ist also das, was man als einen Ausgleichsvorgang zu bezeichnen pflegt. Bei der gedämpften Schwingung vermittelt er den Übergang von der Ruhe in der Normallage zur rein periodischen Bewegung. Der Anteil I ist im allgemeinen nicht die ganze freie Schwingung, sondern nur, wenn $R = 0$ ist, d. h. wenn keine äußere periodische Kraft wirkt.

Da der Anteil II von der äußeren Kraft erregt wird, könnte man dazu neigen, ihn zur erzwungenen Schwingung statt zur freien zu rechnen und lediglich den Anteil I als freie Schwingung zu bezeichnen. Jedoch zieht man es mit Recht vor, hier die Periode als entscheidend zu betrachten und demnach die Anteile I und II, die beide die Periode $2\pi/\lambda$ haben, als freie Schwingung zusammenzufassen und unter der erzwungenen Schwingung nur den Anteil III von der Periode τ zu verstehen.

Beispiele zur Erläuterung.

4. 1. Ein Beispiel für die Anwendung dieser Formel ergibt die Annahme $R(t) = \sin\omega t$. Eine einfache Rechnung ergibt für das letzte Glied der rechten Seite von 8):

$$\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} R \sin\lambda(t-\xi)\, d\xi = -\frac{1}{\omega^2-\lambda^2}\sin\omega t$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\sin(\omega+\lambda)t_0}{\omega+\lambda} - \frac{\sin(\omega-\lambda)t_0}{\omega-\lambda}\right]\cos\lambda t$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\cos(\omega+\lambda)t_0}{\omega+\lambda} - \frac{\cos(\omega-\lambda)t_0}{\omega-\lambda}\right]\sin\lambda t$$

Digitized by Google

Hier erkennt man ohne weiteres das Glied $-\frac{1}{\omega^2-\lambda^2}\sin\omega t$ als erzwungene Schwingung, während die übrigen Glieder zur freien Schwingung zu rechnen sind.

Nicht in allen Fällen ist diese Entscheidung so einfach, dann aber ergibt Formel 19), welcher Teil der allgemeinen Lösung 8) zur erzwungenen Schwingung zu nehmen ist.

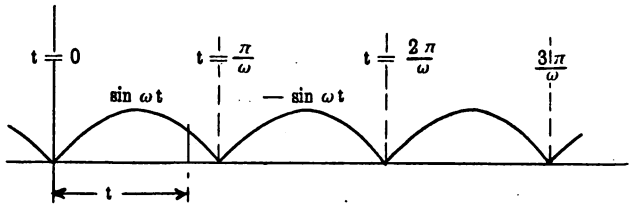
Im Falle $\omega = \lambda$ (Resonanz) hat unser Resultat keinen Sinn, die Rechnung ist deshalb neu durchzuführen. Sie ergibt mit $R(t) = \sin\lambda t$ [gemäß 8)]:

$$\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t} R\sin\lambda(t-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{4\lambda^2}\left[\sin\lambda t - \sin\lambda(2t_0 - t)\right] - \frac{t-t_0}{2\lambda}\cos\lambda t.$$

Es existiert also keine periodische Lösung.

Fig. 1.



2. Als weiteres Beispiel sei noch angenommen (Fig. 1):

$$R(t) = +\sin\omega t \quad \text{im Intervall } 0 \text{ bis } \frac{\pi}{\omega},$$

$$-\sin\omega t \quad \text{von } \frac{\pi}{\omega} \text{ bis } \frac{2\pi}{\omega}$$

$$+\sin\omega t \quad \text{im Intervall } \frac{2\pi}{\omega} \text{ bis } \frac{3\pi}{\omega} \text{ usw.}$$

Dieser Verlauf von R zeigt sich z. B. bei Torsionsschwingungen von Kurbelwellen, die zum Antrieb von Kolbenpumpen dienen.

Hier liefert die Formel 8) direkt kein übersichtliches Resultat, sondern erst nach Umformung vermittelst der Beziehung 23). Die Glieder mit U und U_1 können dann ohne weiteres in den

Digitized by Google

Ausdruck $C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t$ hineinbezogen werden, da ja C_1, C_2 ganz willkürliche Konstanten sind.

Zunächst sind die Größen S und S_1 auszurechnen, die die Periode $\tau = \frac{\pi}{\omega}$ besitzen wie $R(t)$. Wir benutzen hierzu das Intervall von $t - \frac{\pi}{\omega}$ bis t, das den Nullpunkt enthält, so daß man hat:

$$S = -\int_{t-\frac{\pi}{\omega}}^{0} \sin \omega v \sin \lambda (t - v)\, dv + \int_{0}^{t} \sin \omega v \sin \lambda (t - v)\, dv$$

$$= \frac{1}{2(\omega - \lambda)} \left[\sin \lambda t + \sin\left(\omega t + \frac{\lambda \pi}{\omega}\right)\right]$$

$$- \frac{1}{2(\omega + \lambda)} \left[-\sin \lambda t + \sin\left(\omega t - \lambda \frac{\pi}{\omega}\right)\right]$$

$$- \frac{1}{2(\omega - \lambda)} [\sin \omega t - \sin \lambda t] + \frac{1}{2(\omega + \lambda)} [\sin \omega t + \sin \lambda t]$$

$$= \frac{2\omega}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \lambda t - \frac{\lambda}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \omega t + \frac{\lambda}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \frac{\lambda \pi}{\omega} \sin \omega t$$

$$+ \frac{\omega}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \frac{\lambda \pi}{\omega} \cos \omega t.$$

Ebenso folgt:

$$S_1 = \frac{2\omega}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \lambda t - \frac{\omega}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \frac{\lambda \pi}{\omega} \sin \omega t$$

$$+ \frac{\omega}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \frac{\lambda \pi}{\omega} \cos \omega t.$$

Damit ergibt sich nach 19) für die erzwungene Schwingung:

$$x = \frac{\omega}{\lambda(\omega^2 - \lambda^2)} \left\{ \sin \lambda t + \frac{\sin \frac{\lambda \pi}{\omega}}{1 - \cos \frac{\lambda \pi}{\omega}} \cos \lambda t \right\} - \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \omega t.$$

Diese Form der Lösung gilt nur für einen Wert von t, der im Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{\omega}$ liegt, denn unter dieser Annahme wurde die Festsetzung über das Vorzeichen von $R = \pm \sin \omega t$ getroffen. Weil aber x die Periode $\tau = \frac{\pi}{\omega}$ besitzt, ist x für alle Werte von t bestimmt.

Digitized by Google

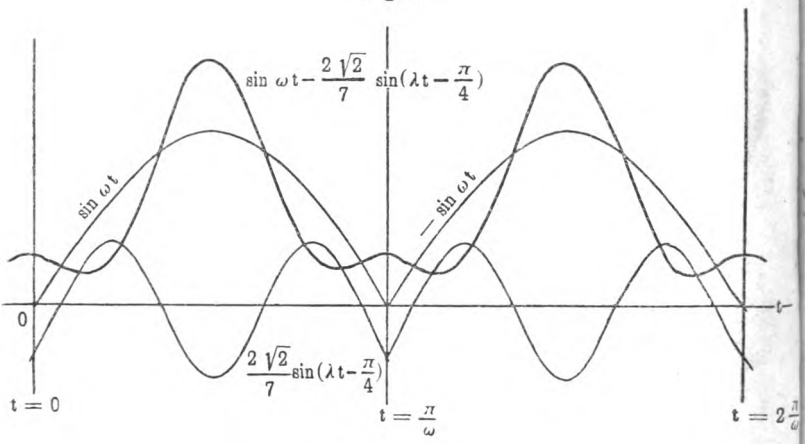
Für einen entsprechenden Punkt $t + \frac{\pi}{\omega}$ im Nachbarintervall von $\frac{\pi}{\omega}$ bis $\frac{2\pi}{\omega}$ ergibt die formale, aber unrichtige Fortsetzung den Wert:

$$\bar{x} = \frac{\omega}{\lambda(\omega^2 - \lambda^2)} \left\{ -\sin \lambda t + \frac{\sin \frac{\lambda \pi}{\omega}}{1 - \cos \frac{\lambda \pi}{\omega}} \cos \lambda t \right\} + \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \omega t$$

Die Lösung hat nur einen Sinn für $\omega \neq \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{6}$ usw.

Für die letztgenannten Werte von ω tritt Resonanz ein. Um diese Erscheinung zu verfolgen, muß man auf Formel 8) zurückgreifen.

Fig. 2.



Zur Erläuterung unseres Resultates diene noch ein Zahlenbeispiel $\omega = \frac{2}{7} \lambda$ oder $\lambda = \frac{7}{2} \omega$. Es ist dann:

$$x = \frac{1}{\omega^2 - \frac{49}{4} \omega^2} \left\{ \frac{2}{7} (\sin \lambda t - \cos \lambda t) - \sin \omega t \right\}$$

$$= \frac{4}{45 \omega^2} \left\{ \sin \omega t - \frac{2}{7} \sqrt{2} \sin \left(\lambda t - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

Stellt man den Ausdruck in der Klammer graphisch dar, so erhält man das Bild der Fig. 2, in welchem die schwach aus-

Digitized by Google

gezogenen Linien die beiden Funktionen darstellen, deren Differenz x proportional ist.

Bemerkenswert ist, daß $\frac{dx}{dt}$ während des ganzen Verlaufes der Bewegung stetig bleibt.

3. Als letztes Beispiel sei angenommen:

$$R(\xi) = e^{-h\xi} \sin \omega \xi,$$

also eine Erregung von konstanter Frequenz, aber abnehmender Intensität.

In Formel 13) wird das letzte Glied der rechten Seite mit $t_0 = 0$

$$\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\chi}{2}t} \int_0^t e^{\left(-h+\frac{\chi}{2}\right)\xi} \sin \omega \xi \sin \lambda (t-\xi)\, d\xi$$

$$= -\frac{e^{-ht}}{2\lambda} \left\{ \frac{\left(-h+\frac{\chi}{2}\right)\cos \omega t + (\omega - \lambda)\sin \omega t}{\left(-h+\frac{\chi}{2}\right)^2 + (\omega-\lambda)^2} - \frac{\left(-h+\frac{\chi}{2}\right)\cos \omega t + (\omega + \lambda)\sin \omega t}{\left(-h+\frac{\chi}{2}\right)^2 + (\omega+\lambda)^2} \right\} + F,$$

wo F nur Glieder von der Form $e^{-\frac{\chi}{2}t}\cos \lambda t$, $e^{-\frac{\chi}{2}t}\sin \lambda t$ enthält.

Alle Glieder mit $\cos \lambda t$ und $\sin \lambda t$ können durch passende Wahl von C_1 und C_2 in Gleichung 13) zum Verschwinden gebracht werden.

Es sei nun speziell $\omega = \sqrt{\alpha}$, was im Falle $h = 0$ auf den unter dem Namen Resonanz bezeichneten Zustand hinauskäme. Dann ist:

$$x = \frac{2\sqrt{\alpha}\left(h - \frac{\chi}{2}\right)\cos \omega t + h(h-\chi)\sin \omega t}{(h^2 - \chi h)^2 + 4\alpha(h^2 - \chi h) + \alpha \chi^2} e^{-ht}.$$

Im Falle $h = 0$ ergibt sich das bekannte Resultat mit der Phasenverschiebung von 90°. Ist h von Null verschieden, so tritt die Phasenverschiebung von 90° nur ein, wenn $h = \chi$ ist. Im Falle $h = \frac{\chi}{2}$ wird die Phasenverschiebung 180°. Bei beliebigem h treten andere Phasenwinkel auf, die gemäß obiger Gleichung zu bestimmen sind.

Digitized by Google

Wie aber vorauszusehen war, tritt die Phasenverschiebung von 90° im allgemeinen nur dann auf, wenn die Erregung sowohl konstante Frequenz wie Amplitude besitzt, selbst im Falle $\omega = \sqrt{\alpha}$.

5. Wie man sieht, ergeben die Integraldarstellungen 8) und 19) auf einfache und übersichtliche Weise die Lösung der Differentialgleichung 1).

Auch in den Fällen, wo die Funktion $R(t)$ oder deren Differentialquotienten nur abteilungsweise stetig sind, ergibt die Benutzung einer Fourierschen Reihe für $R(t)$ keinerlei Vorteile.

Falls jedoch $R(t)$ in der Form eines trigonometrischen Polynoms von endlicher Gliederzahl gegeben ist

$$R(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^n (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \qquad 25)$$

wird man nicht auf die Darstellungen 8) und 19) zurückgreifen, sondern die Lösung in der Form:

$$\left.\begin{aligned} x = {} & C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t + \frac{1}{2}\frac{A_0}{\lambda^2} \\ & + \sum_1^n \left(\frac{A_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2} \cos k\omega t + \frac{B_k}{\lambda^2 - k^2\omega^2} \sin k\omega t \right) \end{aligned}\right\} \qquad 26)$$

benutzen. Hier treten Eigenschwingung und erzwungene Schwingung sichtbar getrennt auf [1]).

Wir können hiermit dieses Kapitel schließen und zusammenfassend sagen, daß die Lösung der Gleichung 1) sich in allen Fällen, wo mechanische oder physikalische Probleme in Frage kommen, einfach und übersichtlich darstellen läßt.

II. Die pseudoharmonische Schwingung.

6. Ist der Aufbau des schwingenden Systems nicht derart, daß die Restitutionskräfte einfach proportional den Entfernungen aus der Mittellage sind, so ist [illegible] rechnerische Ver-

[1]) Sollte die Funktion $R(t)$ nur in [illegible] einer Fourierschen Reihe [also nach 25) für $n = \infty$] gegeben [illegible], so muß in dem Intervall, für das die Lösung 26) Gültigkeit [illegible], die Reihe 25) gleichmäßig konvergieren. Ob es möglich ist, [illegible] über die Grenzen dieses Intervalls fortzusetzen, darüber wäre eine be[illegible]re Untersuchung anzustellen.

Digitized by Google

folgung der erzwungenen und freien Schwingungen wesentlich schwieriger. In den meisten Fällen wird man sich den wirklichen Verhältnissen dadurch nähern, daß man zu αx Glieder zweiter und dritter Ordnung zufügt, so daß man die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = 0 \qquad 1)$$

und

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \sin \omega t \qquad 1\,a)$$

zu betrachten hat. Gleichung 1) ergibt die freien Schwingungen des Systems, Gleichung 1a) die erzwungenen Schwingungen unter dem Einfluß einer harmonisch veränderlichen äußeren Kraft.

Hier sind wir nicht in der Lage, aus der Lösung von 1a) eine solche für eine nach einem allgemeineren Gesetz verlaufende äußere Kraft (etwa durch Anwendung der Fourierschen Reihe) aufzubauen, denn das Gesetz der Superposition gilt nur für die Lösungen linearer Differentialgleichungen. Selbst bei der einfachen Form der rechten Seite scheint die allgemeine Lösung solchen Schwierigkeiten zu begegnen, daß man sich vorläufig mit angenäherten Lösungen begnügen muß. Der wesentliche Unterschied gegenüber der harmonischen Schwingung tritt aber hierbei schon in aller Deutlichkeit hervor.

Die genaue Integration der Gleichung 1) läßt sich bei zahlenmäßig gegebenen Anfangsbedingungen ohne Schwierigkeit mittels elliptischer Funktionen durchführen; es läßt sich jedoch x nicht allgemein explizite durch α, β, γ und die Anfangswerte in einer für die Zahlenrechnung geeigneten Form darstellen. In zwei Fällen jedoch gelingt eine übersichtliche angenäherte Darstellung, nämlich für die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \beta x^2 = 0 \qquad 2)$$

und

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \gamma x^3 = 0 \qquad 3)$$

unter der Voraussetzung, daß β und γ klein gegen α sind.

Im allgemeinen wird man im unsymmetrischen Fall mit Gleichung 2) für praktische Zwecke auskommen und nur beim symmetrischen Fall, wo $\beta = 0$ ist, zu Gleichung 3) greifen.

Digitized by Google

Für die Integration dieser Gleichungen bedienen wir uns der Weierstraßschen elliptischen Funktionen $\wp$ und σ und benutzen zur angenäherten Darstellung die Anfangsglieder der ϑ-Reihen[1]). Die Bezeichnung ist genau in Übereinstimmung mit der Formelsammlung von H. A. Schwarz[2]); auf dieses Buch werden wir uns auch im folgenden stets mit der Abkürzung „Schwarz F." beziehen.

7. Der Vollständigkeit halber sei zunächst der Rechnungsgang für die zahlenmäßige Behandlung der Gleichung 1) für die freie Schwingung angegeben (vgl. Anhang I und II, S. 117).

Durch Multiplikation mit $\frac{dx}{dt}$ und Integration folgt in bekannter Weise:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{3}x^3 - \frac{\gamma}{4}x^4 = \text{Const.}$$

Die Anfangsbedingungen seien:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{für } t = 0.$$

Es folgt:

$$\text{Const} = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{\alpha}{2}x_0^2 - \frac{\beta}{3}x_0^3 - \frac{\gamma}{4}x_0^4.$$

Wir setzen

$$v^2 = v_0^2 + \alpha x_0^2 - \frac{2}{3}\beta x_0^3 - \frac{\gamma}{2}x_0^4 \qquad 4)$$

und erhalten

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 - \alpha x^2 + \frac{2}{3}\beta x^3 + \frac{\gamma}{2}x^4 \qquad 5)$$

Bezeichnet man die rechtsstehende rationale Funktion von x wie üblich mit $R(x)$ und sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Nullstellen von $R(x)$, d. h. die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, so kann Gleichung 5) auch geschrieben werden:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\gamma}{2}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = R(x) \qquad 5\,a)$$

---

[1]) Anhang I, S. 117.

[2]) H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen, 2. Aufl. Berlin, Springer, 1893. Siehe auch H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, 2. Aufl. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1908.

Digitized by Google

Nach Weierstraß[1]) wird durch die Substitution:

$$s = \frac{1}{4}\frac{R'(x_4)}{x - x_4} + \frac{1}{24}R''(x_4) \qquad 6)$$

as Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in die Form $-\frac{ds}{\sqrt{S}}$ übergeführt, wo
$S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$ und e_1, e_2, e_3 die Werte von s
bedeuten, die den Werten $x = x_1, x_2, x_3$ entsprechen; dem Werte
$= x_4$ entspricht $s = \infty$ (Anhang II und III, S. 120). Unsere
Differentialgleichung nimmt demnach die Normalform

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3) \qquad 7)$$

mit der wichtigen Eigenschaft $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ an (Anhang III).
Das allgemeine Integral von 7) wird durch die Weierstraßsche elliptische $\wp$-Funktion in der einfachen Form

$$s = \wp(t + C) \qquad 8)$$

dargestellt, wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, die durch die Anfangsbedingung $x = x_0$ für $t = 0$ bestimmt ist.

Die weitere Behandlung dieses Resultates für die Zahlenrechnung soll später an einem konkreten Falle gezeigt werden. Wir wenden uns zunächst zur Gleichung 3), die insofern einfacher ist, als sie eine zur Mittellage symmetrische Schwingung ergibt.

Symmetrischer Fall ($\beta = 0$, $\gamma \neq 0$).

8. Aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \gamma x^3 = 0 \qquad 3)$$

ergibt sich, wie vorher, bei den Anfangsbedingungen:

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{für } t = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 - \alpha x^2 + \frac{\gamma}{2}x^4, \qquad 9)$$

$$\text{wo } v^2 = v_0^2 + \alpha x_0 - \frac{\gamma}{2}x_0^4.$$

---

[1]) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen, S. 15, Formel VI. Berlin 1915.

Digitized by Google

Hier läßt sich die Faktorenzerlegung unmittelbar angeb
da die Wurzeln von $R(x) = 0$ durch die Formel

$$x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\gamma v^2}{\alpha^2}}\right\}}$$

gegeben sind. Unter der Voraussetzung, die in den meist
Fällen zutrifft, daß γ klein gegen α ist, können die Wurz
mit guter Annäherung in der Form:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\left[1 - \frac{\gamma v^2}{4\alpha^2}\right], \quad x_2 = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\left[1 - \frac{\gamma v^2}{4\alpha^2}\right],$$

$$x_3 = \frac{v}{\sqrt{\alpha}}, \quad x_4 = -\frac{v}{\sqrt{\alpha}}$$

dargestellt werden.

Mit den Bezeichnungen

$$\frac{v}{\sqrt{\alpha}} = a, \quad \frac{2\alpha}{\gamma} = c^2$$

hat man alsdann:

$$x_1 = c\left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right], \quad x_2 = -c\left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right], \quad x_3 = a, \quad x_4 = -$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\gamma}{2}\left[x^2 - c^2\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)^2\right][x^2 - a^2]$$

Man könnte nun diese Gleichung durch die Substitution
unmittelbar in die Weierstraßsche Normalform überführen, ma
spart aber in diesem speziellen Falle an Rechenarbeit, wenn ma
zunächst durch die Substitution [1])

$$x^2 = a^2 z$$

die Zwischenform (Riemannsche Normalform)

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\gamma c^2\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)^2 z(z-1)\left[\frac{a^2}{c^2\left(\frac{a^2}{1 - \frac{a^2}{2c^2}}\right)^2} z - 1\right]$$

herstellt und von hier aus zur Weierstraßschen Form durc
die Substitutionen

$$z = \frac{e_1 - e_3}{s - e_3}, \qquad u = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \cdot c\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right) t$$

[1]) Die Substitution lautet $x^2 = x_3^2 z$, wenn mit den genauen $x_1 x_2 \ldots$
gerechnet wird.

Digitized by Google

ibergeht, wobei für die Werte e_1, e_2, e_3 folgende Bedingungen ıngenommen werden [1]):

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2}{c^2\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)^2},$$

$$e_1 - e_3 = 1.$$

Hieraus ergeben sich zunächst:

$$e_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{a^2}{c^2\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)^2},$$

$$e_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{a^2}{c^2\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)^2},$$

$$e_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{a^2}{c^2\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)^2}.$$

Unter der schon gemachten Voraussetzung, daß γ klein gegen α, vereinfachen sich diese Ausdrücke in:

$$e_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{a^2}{c^2}, \quad e_2 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{a^2}{c^2}, \quad e_3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{a^2}{c^2}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo} \quad a &= \frac{v}{\sqrt{\alpha}}, \quad c = \sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}, \\ \frac{a^2}{c^2} &= \frac{\gamma v^2}{2\alpha^2}. \end{aligned}\right\} \tag{13 a}$$

Unsere Differentialgleichung 9) ist dann schließlich ersetzt durch die Gleichung:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3). \tag{14}$$

Wir erhalten die Lösung:

$$s = \wp(u + C) \tag{15}$$

[1]) Bei der Rechnung mit den genauen $x_1 \ldots x_4$ ist zu setzen:

$$\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{x_3^2}{x_1^2}.$$

Digitized by Google

mit der willkürlichen Integrationskonstanten C. Die Anfangsbedingung $x = x_0$ für $t = 0$ ist gleichwertig mit

$$s = s_0 = e_3 + \frac{a^2}{x_0^2} \quad \text{für } u = 0$$

und ergibt zur Bestimmung von C die Gleichung:

$$\wp\,(C) = e_3 + \frac{a^2}{x_0^2}.$$

Insbesondere ergibt sich $C = 0$, wenn wir die Annahme $x_0 = 0$ machen, was uns freisteht.

Unter Benutzung von 11) und 12) folgt dann:

$$x = \frac{a}{\sqrt{s - e_3}} = \frac{a}{\sqrt{\wp\,(u) - e_3}}, \quad \text{wo } u = c\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)t.$$

Nach Schwarz F., Art. 24 ist aber

$$\wp\,(u) - e_3 = \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma^2 u},$$

so daß man schließlich erhält:

$$x = a\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}.$$

σ und σ_3 sind ganze transzendente Funktionen des Argumentes

$$u = c\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left(1 - \frac{a^2}{2c^2}\right)t,$$

d. h. die Lösung unserer Differentialgleichung 3) kann dargestellt werden als Quotient zweier für alle endlichen Werte des Argumentes u konvergierenden Potenzreihen.

Diese Darstellung unserer Lösung durch die einfachsten Funktionen σ, die sich stets für den Ausgang der Untersuchung empfiehlt, ist für die schließliche Auswertung weniger geeignet als die im allgemeinen rasch konvergierenden ϑ-Reihen.

Der Übergang von den Funktionen σ zu den ϑ-Funktionen vollzieht sich in unserem Falle nach Schwarz F., Art. 45, Gleichungen 3) bis 17) (s. auch Anhang I, S. 120).

Nach Gleichung 10) und 13) (Schwarz F.) ist

$$\frac{\sqrt[8]{G}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{\vartheta_1\,(v|\tau)}{\vartheta_0\,(v|\tau)}, \quad v = \frac{u}{2\omega_1}, \quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1},$$

Digitized by Google

ährend 8) und 9)

$$\frac{\sqrt[8]{G}}{\sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{\pi}{\omega_1} h^{1/4} \frac{1 - 3h^2 + 5h^6 + \cdots}{1 + 2h + 2h^4 + \cdots}$$

rgibt mit

$$h = \frac{1}{2} l + 2\left(\frac{1}{2} l\right)^5 + \cdots,$$

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} \quad \text{nach 3) (Schwarz F.)}$$

nd

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} \sqrt[4]{e_1 - e_3} = 1 + 2h + 2h^4 + \cdots \quad \text{nach 7) (Schwarz F.)}$$

Mit den Werten nach unserer Formel 13) folgt

$$e_1 - e_2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$$

nd bei der angenommenen Kleinheit von

$$\frac{a^2}{c^2}, \quad \sqrt[4]{e_1 - e_2} = 1 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{c^2},$$

$$l = \frac{\frac{1}{4} \frac{a^2}{c^2}}{2 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{c^2}} = \frac{1}{8} \frac{a^2}{c^2}, \quad \text{mithin} \quad h = \frac{1}{16} \frac{a^2}{c^2}. \qquad 18)$$

Auch von der kleinen Größe h seien alle Potenzen, die höher ls die erste sind, vernachlässigt, so daß man schließlich nach chwarz F., Art. 45, Gleichung 14) und 15) erhält:

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2}(1 + 4h),$$

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{1 + 2h}{2h^{1/4}} \frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_0(v|\tau)} = (1 + 2h) \frac{\sin v\pi}{1 - 2h \cos 2v\pi}. \qquad 19)$$

Mit $v = \frac{u}{2\omega_1} = \frac{u}{\pi}(1 - 4h)$ schreibt sich noch einfacher mit Rücksicht auf die Vernachlässigung von h^2 gegen 1):

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = (1 + 2h) \sin v\pi \cdot [1 + 2h \cos 2v\pi]$$
$$= (1 + 2h)[(1 - h) \sin v\pi + h \sin 3v\pi].$$

Digitized by Google

Hieraus ergibt sich dann:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\{(1+h)\sin v\pi + h\sin 3v\pi\} \\ &= a\{(1+h)\sin[(1-4h)u] + h\sin[3(1-4h)u]\}. \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

Führt man aus 16) noch

$$u = \sqrt{\alpha}(1-8h)t$$

ein, so hat man die endgültige Darstellung

$$\left.\begin{aligned} x = 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\sqrt{h}(1+h)\sin[\sqrt{\alpha}(1-12h)t] \\ + h\sin[3\sqrt{\alpha}(1-12h)t]. \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Den hierdurch beschriebenen Schwingungsvorgang kann man sich entstanden denken aus der Übereinanderlegung einer Grundschwingung von reiner Sinusform und der dritten Oberschwingung, die aber nur untergeordnete Größe besitzt.

Das Resultat 21) unserer Untersuchung stellt die Bewegung mit einer für technische Zwecke (wobei sehr große Amplituden nicht in Frage kommen) vollkommen genügenden Genauigkeit dar, wie noch in späteren Zahlenbeispielen nachgewiesen werden wird. Die Größe h hängt außer von α und γ noch von den Anfangsbedingungen ab. Sie kann daher, falls keine Anfangsbedingungen vorgeschrieben sind, als ein willkürlicher Parameter betrachtet werden, der zugleich Ausschlag und Schwingungsdauer beeinflußt.

Sind die Voraussetzungen, auf denen die Herleitung des Resultates 21) beruhte, nicht erfüllt, so bleibt doch der ganze Rechnungsgang unverändert; es sind lediglich für x_1, x_2, x_3, x_4 die genaueren Wurzeln, die sich durch Auflösung der Gleichung

$$R(x) = \frac{\gamma}{2}x^4 - \alpha x^2 + v^2 = 0$$

ergeben, bei Berechnung der Werte e_1, e_2, e_3, h usw. einzusetzen und ferner in den Reihenentwickelungen noch Glieder mit h^2 zu berücksichtigen. Die Größe l ist möglichst scharf zu bestimmen; zur Bestimmung von h ist nur in seltenen Fällen das zweite Glied der Reihe erforderlich.

Für $t = 0$ ergibt Formel 21) $x = 0$, wie es nach der Anfangsbedingung sein muß.

Digitized by Google

Für $\sqrt{\alpha}(1-12h)t = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich aus 21) der größte Ausschlag

$$A = 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\sqrt{h} \qquad 22)$$

Die Kreisfrequenz (bezogen auf 2π Sekunden) ist

$$\lambda = \sqrt{\alpha}(1-12h) \qquad 23)$$

Bei unendlich kleinen Schwingungen ist mit $h = 0$

$$\lambda_0 = \sqrt{\alpha},$$

wie bekannt. Die Gleichung 3) für die freie Schwingung läßt sich also in jedem Falle ohne Schwierigkeit lösen.

9. Der Gedanke liegt nun nahe, zu versuchen, ob man von der allgemeinen Lösung 21) der Gleichung 3) für die freie Schwingung zu einer Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \gamma x^3 = k \sin \omega t \qquad 24)$$

für die erzwungene Schwingung gelangen kann, wenigstens für sehr kleine Werte von h, um auf diesem Wege vielleicht einen Ausblick für den Fall größerer h zu gewinnen. Zu diesem Zwecke seien in dem Resultat 21) noch weitere Vernachlässigungen vorgenommen und die Lösung auf die Form

$$x = 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\sqrt{h}\sin\left[\sqrt{\alpha}(1-12h)(t+C)\right] \qquad 25)$$

gebracht, wo h und C die willkürlichen Konstanten der Lösung darstellen.

Diesem Resultate kann man auch die Form

$$x = 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\left[A\sin\left[\sqrt{\alpha}(1-12h)t\right] + B\cos\left[\sqrt{\alpha}(1-12h)t\right]\right] \qquad 26)$$

geben, wo jetzt h, A, B willkürliche Konstanten sind, die an die Bedingung

$$A^2 + B^2 = h \qquad 27)$$

gebunden sind.

Wir betrachten nunmehr A, B, h als Funktionen von t, die so zu bestimmen sind, daß die Gleichung 24) wenigstens bis auf Größen von der Ordnung h erfüllt wird. Wir nehmen an, daß

Digitized by Google

die Glieder mit dem Faktor $\frac{dh}{dt}$ weggelassen werden können, d
also die Größe

$$\lambda = \sqrt{\alpha}(1 - 12h) \qquad 2$$

nur sehr kleine Schwankungen erleidet.

Bezeichnen wir

$$\frac{dA}{dt}, \frac{dB}{dt} \cdots \text{ mit } \dot{A}, \dot{B} \cdots,$$

so folgt aus 26):

$$\dot{x} = 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\lambda[A\cos\lambda t - B\sin\lambda t] + 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}[\dot{A}\sin\lambda t + \dot{B}\cos\lambda t].$$

In bekannter Weise [wie bei Gleichung 4) der harmonische Schwingung] treffen wir die Festsetzung

$$\dot{A}\sin\lambda t + \dot{B}\cos\lambda t = 0,$$

dann wird

$$\ddot{x} = -4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\lambda^2[A\sin\lambda t + B\cos\lambda t] + 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\lambda[\dot{A}\cos\lambda t - \dot{B}\sin\lambda t].$$

Die Größen A und B sind gemäß 27) von der Ordnung h; die fett gedruckten Terme machen die linke Seite von 24) zu Null, abgesehen von kleinen Größen höherer Ordnung als h. Wir erhalten daher für A und B die weitere Bedingung

$$\dot{A}\cos\lambda t - \dot{B}\sin\lambda t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\gamma}{2\alpha}}\frac{k\sin\omega t}{\lambda} = \varkappa\sin\omega t,$$

wo

$$\varkappa = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\gamma}{2\alpha}}\frac{k}{\sqrt{\alpha}(1-12h)}.$$

In Verbindung mit

$$\dot{A}\sin\lambda t + \dot{B}\cos\lambda t = 0$$

folgt hieraus

$$\dot{A} = \varkappa\sin\omega t\cos\lambda t, \quad \dot{B} = -\varkappa\sin\omega t\sin\lambda t. \qquad 2$$

Digitized by Google

Unter der Voraussetzung, daß $\dot{h}$ vernachlässigt werden kann, olgt hieraus:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\varkappa}{2}\left[\frac{\cos(\omega+\lambda)t}{\omega+\lambda}+\frac{\cos(\omega-\lambda)t}{\omega-\lambda}\right] \\ B &= \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{\sin(\omega+\lambda)t}{\omega+\lambda}-\frac{\sin(\omega-\lambda)t}{\omega-\lambda}\right] \end{aligned}\right\} \quad 30)$$

$$x = 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\frac{\varkappa}{2}\left[\frac{\sin\omega t}{\omega+\lambda}-\frac{\sin\omega t}{\omega-\lambda}\right] = -\frac{k\sin\omega t}{\omega^2-\alpha(1-12h)^2}. \quad 31)$$

Die Bedingung $A^2+B^2=h$ liefert dann für h die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\varkappa^2}{4}\left[\frac{1}{(\omega+\lambda)^2}+\frac{1}{(\omega-\lambda)^2}+\frac{2\cos 2\omega t}{\omega^2-\lambda^2}\right] = h \quad 31\,a)$$

wo $\lambda = \sqrt{\alpha}(1-12h)$ noch einzusetzen ist.

Bei der Herleitung von 30) aus 29) muß die Voraussetzung gemacht werden, daß die Funktion h auch für $\omega=\sqrt{\alpha}$ für keinen reellen Wert von t verschwindet, denn es ist z. B.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\cos(\omega-\lambda)t}{\omega-\lambda}\right] = -\sin(\omega-\lambda)t+\frac{t\sin(\omega-\lambda)t}{\omega-\lambda}\dot{\lambda} + \frac{\cos(\omega-\lambda)t}{(\omega-\lambda)^2}\dot{\lambda},$$

und für $\omega=\sqrt{\alpha}$ und verschwindendes h könnte das letzte Glied auch bei kleinem h nicht vernachlässigt werden. Die Voraussetzung, daß h nicht verschwindet, ist aber nach Gleichung 31 a) erfüllt.

Die Gleichung 31) ergibt für jede positive kleine Wurzel h von 31 a) eine Lösung unserer Differentialgleichung mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$.

Bei Betrachtung der Formeln 31) und 31 a) drängt sich nun die Frage auf: Was wird daraus für den Fall $\omega=\lambda$? Dieser Fall kann aber gar nicht eintreten. Denn zufolge der Bedeutung von h muß der Klammerausdruck von 31 a) stets eine kleine Größe bleiben. Geometrisch gedeutet, ist er das Quadrat der dritten Seite des Dreiecks mit den Seiten $\frac{1}{\omega-\lambda}$, $\frac{1}{\omega+\lambda}$ und dem Außenwinkel $2\omega t$. Mit $\omega=\lambda$ könnte daher keinesfalls Gleichung 31 a) erfüllt werden.

Digitized by Google

Man sieht, daß h in außerordentlich komplizierter Weise von $\varkappa$ abhängt und daß auch das Bewegungsgesetz nach Gleichung 31 sehr verwickelt ist, wenn es auch im großen ganzen einer harmonischen Schwingung ähnelt. Die Aussichten dafür, daß eine Integration der Gleichung 24) mit einfachen Mitteln allgemein durchführbar wäre, sind demnach nur gering.

Aus 31) folgt für $\omega t = \frac{\pi}{2}$ der maximale Ausschlag, da sich h nur sehr langsam mit t ändert, zu

$$\varkappa = \frac{k}{\omega^2 - \alpha(1-12h)^2}, \qquad 32$$

wo h der Gleichung

$$\frac{\varkappa^2}{4}\left[\frac{1}{\omega+\lambda} - \frac{1}{\omega-\lambda}\right]^2 = h \qquad 32a$$

genügen muß, oder da

$$\varkappa = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\gamma}{2\alpha}}\frac{k}{\sqrt{\alpha}(1-12h)}$$

ist, der Gleichung

$$[\omega^2 - \alpha(1-12h)^2]^2 = \frac{\gamma k^2}{32\alpha h}. \qquad 32b$$

Von der Lage der Wurzeln dieser Gleichung fünften Grades für h erhält man ein Bild, wenn man 32b) in der Form

$$\omega^2 - \alpha(1-12h)^2 = \pm k\sqrt{\frac{\gamma}{32\alpha}}\frac{1}{\sqrt{h}}$$

schreibt. Die Wurzeln werden dann durch die Schnittpunkte der beiden Kurven

$$\zeta = \pm k\sqrt{\frac{\gamma}{32\alpha}}\frac{1}{\sqrt{h}} \quad \text{und} \quad \zeta = \omega^2 - \alpha(1-12h)^2$$

geliefert. Hiernach ergeben sich im allgemeinen zwei nahe beieinander liegende größere (also gemäß unseren ursprünglichen Voraussetzungen unbrauchbare) und eine oder drei kleine Wurzeln, die mit unseren Annahmen nicht im Widerspruch sind (vgl. Fig. 3).

Für $\omega = \sqrt{\alpha}$ ergibt sich nur eine kleine Wurzel

$$h = \frac{1}{24\omega^2}\sqrt[3]{\frac{3}{4}\gamma k^2}$$

Digitized by Google

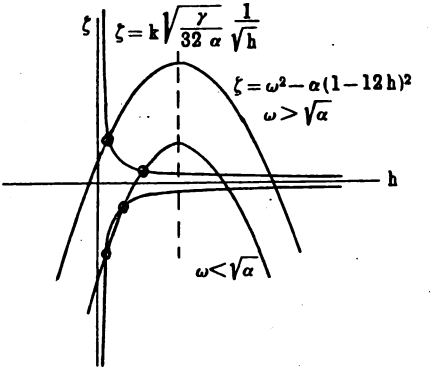
ntsprechend

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\frac{k}{\gamma}} \,. \qquad 33)$$

Für $\omega > \sqrt{\alpha}$ ergibt sich ebenfalls nur eine Wurzel, während ir $\omega < \sqrt{\alpha}$ unter Umständen drei unseren Voraussetzungen entprechende Wurzeln erscheinen.

Man ersieht hieraus, daß selbst bei Beschränkung auf leine Schwingungen die Bewegung ganz besondere igenschaften gegenüber der einfachen harmonischen chwingung aufweist: Existenz eines periodischen Bewegungsustandes im Falle $\omega = \sqrt{\alpha}$ nd Existenz mehrerer periischer Bewegungszustände ir $\omega < \sqrt{\alpha}$.

Fig. 3.



10. Um Lösungen der leichung 24) zu erhalten, die ir große Ausschläge Gülgkeit haben, wird man die [ethode der sukzessiven nnäherung benutzen. Die ösung erscheint in Form iner konvergenten Reihe, ie jedoch erst dann zur prakschen Verwendung gelangen ann, nachdem die Eigenschaften der durch sie definierten Funkon erforscht sind.

Um zu zeigen, was hierunter zu verstehen ist, sei die leichung 24) zunächst mit der speziellen Annahme $\gamma = 0$, ei der ja die Lösung bekannt ist, in diesem Sinne behandelt.

Wir setzen als Anfangsbedingungen fest

$$x = 0, \quad \dot{x} = v \quad \text{für } t = 0.$$

Mit der Annahme des ersten Näherungswertes $x_0 = 0$ erhalten wir aus der Gleichung

$$\ddot{x} = k \sin \omega t - \alpha x$$

ir den zweiten Näherungswert x_1

$$\ddot{x}_1 = k \sin \omega t - \alpha x_0 = k \sin \omega t$$

Digitized by Google

und daraus

$$\dot{x}_1 = -\frac{k}{\omega}\cos\omega t + \text{Const.}$$

Für $t = 0$ soll sich aber $\dot{x}_1 = v$ ergeben, so daß die Konstante den Wert $v + \frac{k}{\omega}$ erhält. Es folgt dann

$$x_1 = -\frac{k}{\omega^2}\sin\omega t + \left(v + \frac{k}{\omega}\right)t + C_1.$$

Die Bedingung $x_1 = 0$ für $t = 0$ ergibt $C_1 = 0$. Mit dem so erhaltenen Werte, der die Anfangsbedingungen erfüllt,

$$x_1 = -\frac{k}{\omega^2}\sin\omega t + \left(v + \frac{k}{\omega}\right)t,$$

ergibt sich die folgende Annäherung:

$$\ddot{x}_2 = k\sin\omega t + \frac{\alpha k}{\omega^2}\sin\omega t - \alpha\left(v + \frac{k}{\omega}\right)t,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{\omega}\cos\omega t - \frac{\alpha k}{\omega^3}\cos\omega t - \alpha\left(v + \frac{k}{\omega}\right)\frac{t^2}{2} + C.$$

Die Anfangsbedingung $\dot{x}_2 = v$ für $t = 0$ ergibt

$$C = v + \frac{k}{\omega} + \frac{\alpha k}{\omega^3},$$

so daß man erhält

$$x_2 = -\frac{k}{\omega^2}\sin\omega t - \frac{\alpha k}{\omega^4}\sin\omega t - \alpha\left(v + \frac{k}{\omega}\right)\frac{t^3}{3!} + \left(v + \frac{k}{\omega} + \frac{\alpha k}{\omega^3}\right)t$$

wo $x_2 = 0$, $\dot{x}_2 = v$ für $t = 0$.

Fährt man in dieser Weise fort, so ergibt sich schließlich die Lösung

$$x = -\frac{k}{\omega^2}\sin\omega t\left[1 + \frac{\alpha}{\omega^2} + \frac{\alpha^2}{\omega^4} + \cdots\right]$$

$$+\left[v + \frac{k}{\omega} + \frac{\alpha k}{\omega^3} + \frac{\alpha^2 k}{\omega^5} + \cdots\right]\left[t - \alpha\frac{t^3}{3!} + \alpha^2\frac{t^5}{5!} - \alpha^3\frac{t^7}{7!} + \cdots\right].$$

Die hier auftretenden unendlichen Reihen sind konvergent und zwar die beiden ersten für $\frac{\alpha}{\omega^2} < 1$, die letzte für jeden Wert von α und t. Zur wirklichen zahlenmäßigen Berechnung von x kann das Resultat aber erst verwendet werden, wenn man die Natur der durch die letzte Reihe dargestellten Funktion studiert

Digitized by Google

at. In unserem Falle sind aber alle Eigenschaften der Funktion, sbesondere das für die Berechnung unentbehrliche Additions-heorem, bekannt, es ist

$$t - \alpha\frac{t^3}{3!} + \alpha^2\frac{t^5}{5!} - \cdots = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sin\sqrt{\alpha}\,t.$$

Man hat daher die Lösung der Gleichung 24) für die erzungene Schwingung im Falle $\gamma = 0$ in der Form

$$x = -\frac{k\sin\omega t}{\omega^2 - \alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[v + \frac{k\omega}{\omega^2 - \alpha}\right]\sin\sqrt{\alpha}\,t$$

urch die Methode der sukzessiven Annäherung gewonnen. Durch insetzen in die Differentialgleichung überzeugt man sich, daß ie Einschränkung $\frac{\alpha}{\omega^2} < 1$, die wegen der Konvergenz der Reihen otwendig war, wegfallen kann.

Das Verfahren kann unverändert zur Behandlung der Gleihung 24) im Falle $\gamma \neq 0$ verwendet werden, die entstehenden eihen sind aber keineswegs einfacher Natur, im Falle $k = 0$ ihren sie auf elliptische Funktionen.

11. Wir wollen uns daher vorläufig darauf beschränken, ösungen von 24) aufzusuchen, welche die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ beitzen und deren Existenz nach allgemeinen Theoremen über ifferentialgleichungen feststeht.

Wir greifen zunächst wieder auf unser einfaches Beispiel

$$\ddot{x} + \alpha x = k\sin\omega t,$$

lso auf die Gleichung für die erzwungene harmonische Schwinung zurück ($\gamma = 0$).

Wir verzichten hier auf Anfangsbedingungen und bestimmen ie Integrationskonstanten so, daß alle Näherungswerte die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ besitzen, dann sind wir auch sicher, daß der angestrebte Grenzwert die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ besitzt. Man muß jedoch bei dieser Art des Vorgehens im Auge behalten, daß man keineswegs sicher st, alle Lösungen von der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ zu erhalten.

Digitized by Google

Wir wählen als erste Näherung

$$x_0 = A \sin \omega t,$$

wo A eine beliebige Konstante bedeutet.

Für den zweiten Näherungswert hat man

$$\ddot{x}_1 = k \sin \omega t - \alpha x_0 = k \sin \omega t - \alpha A \sin \omega t,$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\omega}(k - \alpha A) \cos \omega t + C,$$

$$x_1 = -\frac{1}{\omega^2}(k - \alpha A) \sin \omega t + Ct + C_1.$$

Damit x_1 und x_2 die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ besitzen, müssen C und C_1 ve schwinden.

So fortfahrend erhält man die Näherungswerte:

$$x_2 = -\frac{k}{\omega^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\omega^2}\right) \sin \omega t + A \frac{\alpha^2}{\omega^4} \sin \omega t,$$

$$x_3 = -\frac{k}{\omega^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\omega^2} + \frac{\alpha^2}{\omega^4}\right) \sin \omega t + A \frac{\alpha^3}{\omega^6} \sin \omega t.$$

Bei den folgenden Werten verschwindet, unter der Voraussetzung $\frac{\alpha}{\omega^2} < 1$, der Einfluß der beliebigen Konstanten A me und mehr, so daß man schließlich als Lösung von der Periode

$$x = -\frac{k}{\omega^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\omega^2} + \frac{\alpha^2}{\omega^4} + \cdots \text{usf.}\right) \sin \omega t = -\frac{k \sin \omega t}{\omega^2 - \alpha}$$

erhält in Übereinstimmung mit dem allgemeineren früher Resultate.

Wir machen die für die Behandlung der Gleichung 24) wic tige Bemerkung, daß man eine raschere Annäherung an d Grenzwert x erhält, wenn man die Konstante A passe wählt. In letzter Linie beruht doch der Erfolg des Verfahre darauf, daß sich schließlich zwei aufeinander folgende Näherung werte nicht mehr voneinander unterscheiden.

Versuchen wir bei der Gleichung der harmonischen Schwi gung $x_1 = x_0$ zu machen, so ergibt sich zur Bestimmung von die Gleichung

$$-\frac{1}{\omega^2}(k - \alpha A) = A$$

oder

$$A = -\frac{k}{\omega^2 - \alpha}.$$

Digitized by Google

Dann wird aber auch $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$ usw.; der Prozeß ist schon nach der ersten Operation zu Ende.

12. In derselben Weise wollen wir auch bei der Gleichung 24) für die nicht harmonische Schwingung

$$\ddot{x} + \alpha x - \gamma x^3 = k \sin \omega t \qquad 24\,a)$$

vorgehen, in der jetzt γ von Null verschieden sein soll. Dabei bleibt jedoch trotz dieses Kunstgriffes der unendliche Prozeß bestehen.

Wir setzen $x_0 = A \sin \omega t$ und erhalten mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\,\omega t$$

den ersten Näherungswert [von derselben Form wie 21)]

$$x_1 = -\frac{1}{\omega^2}\left(k - \alpha A + \frac{3}{4}\gamma A^3\right) \sin \omega t + \frac{\gamma}{36\,\omega^2} A^3 \sin 3\,\omega t \qquad 34)$$

Wir machen jetzt die Annahme

$$-\frac{1}{\omega^2}\left(k - \alpha A + \frac{3}{4}\gamma A^3\right) = A. \qquad 34\,a)$$

Es läßt sich jedenfalls ein reeller Wert A finden, der dieser Bedingung genügt, und mit diesem führen wir den Prozeß zu Ende, so daß wir schließlich die Lösung von 24) in Gestalt einer Fourierschen Reihe erhalten.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\sin^2 \omega t \sin 3\,\omega t = -\frac{1}{4} \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 3\,\omega t - \frac{1}{4} \sin 5\,\omega t,$$

$$\sin \omega t \sin^2 3\,\omega t = \frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{1}{4} \sin 5\,\omega t - \frac{1}{4} \sin 7\,\omega t,$$

$$\sin^3 3\,\omega t = \frac{3}{4} \sin 3\,\omega t - \frac{1}{4} \sin 9\,\omega t$$

bestimmen wir noch die Anfangsglieder des zweiten Näherungswertes; es ist

$$x_2 = -\frac{\sin \omega t}{\omega^2}\left\{k - \alpha A + \frac{3}{4}\gamma A^3 - \frac{\gamma^2}{48\,\omega^2} A^5 + \frac{\gamma^3}{864\,\omega^4} A^7\right\}$$

$$- \frac{\sin 3\,\omega t}{9\,\omega^2}\left\{-\frac{1}{4}\gamma A^3 - \frac{\alpha\gamma}{36\,\omega^2} A^3 + \frac{1}{24}\frac{\gamma^2}{\omega^2} A^5 + \frac{1}{62208}\frac{\gamma^4}{\omega^6} A^9\right\} + \cdots$$

Digitized by Google

Mit Rücksicht auf 34a) hat man

$$x_2 = \left\{A + \frac{1}{48}\frac{\gamma^2}{\omega^4}A^5 - \frac{1}{864}\frac{\gamma^3}{\omega^6}A^7\right\}\sin\omega t$$
$$+\left\{\frac{1}{36}\frac{\gamma}{\omega^2}A^3 + \frac{1}{324}\frac{\alpha\gamma}{\omega^4}A^3 - \frac{1}{216}\frac{\gamma^2}{\omega^4}A^5 - \frac{1}{559872}\frac{\gamma^4}{\omega^8}A^9\right\}\sin 3\omega t + \cdots$$

Die Veränderungen von x_2 gegenüber x_1 und um so mehr d von x_3 gegen x_2 usf. sind in den meisten Fällen zu vernac lässigen, so daß als angenäherte periodische Lösung der Gl chung 24)

$$x = A\sin\omega t + \frac{1}{36}\frac{\gamma}{\omega^2}A^3\sin 3\omega t \qquad 3$$

gelten kann mit den reellen Werten A, die der kubischen Gleichu

$$\frac{3}{4}\gamma A^3 + (\omega^2 - \alpha)A + k = 0 \qquad 36$$

genügen. Wir geben dieser Gleichung die Form

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)A - \frac{k}{\alpha} = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3. \qquad 3$$

Wir stellen zunächst fest, daß dieses Resultat im Fal $\omega = \sqrt{\alpha}$ (bei kleinen Werten von k und A) mit der Gleichung 3 S. 35, übereinstimmt, die auf ganz anderem Wege gewonnen wo den ist.

Die Konvergenz des Prozesses, also die Berechtigung d Approximationsverfahrens ist ohne weiteres evident, wenn d Wert von $\frac{\gamma}{\omega^2}A^2$ gegen 1 vernachlässigt werden darf. Trifft di nicht zu, so müssen die Größen $\frac{\omega^2}{\alpha}, \frac{k}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ gewissen Bedingunge genügen, damit der Prozeß konvergiert; so sieht man auch ohn weiteres ein, daß bei genügender Verkleinerung von ω die Ko vergenz aufhört. Auf diese nicht einfache Frage behalte ich m vor bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen.

Um aber vorläufig ein Bild von der Stärke der Konverge zu erhalten im Falle, daß $\frac{\gamma}{\omega^2}A^2$ nicht gegen 1 vernachlässig werden kann, seien für die folgenden Daten die Anfangsglied von x_3 berechnet. Da diese Anfangsglieder von x_3 von all

Digitized by Google

Gliedern des Ausdruckes x_2 abhängen, so muß der Ausdruck x_2 vollständig angeschrieben werden.

Es sei

$$\frac{\gamma A^2}{\omega^2} = 1, \quad \frac{\omega^2}{\alpha} = \frac{4}{7}, \quad k = 0,$$

welche Werte der Gleichung 37) genügen.

Beim symmetrischen Pendel würde diesen Verhältnissen eine freie Schwingung entsprechen, deren Ausschlag ungefähr das 1,85fache der Pendellänge beträgt [1]).

Der einfacheren Schreibweise halber seien die Werte von

$$\frac{x_0}{A} = z_0, \quad \frac{x_1}{A} = z_1, \quad \frac{x_2}{A} = z_2$$

und schließlich die Anfangsglieder von $\frac{x_3}{A} = z_3$ berechnet.

Aus $\ddot{x}_1 = -\alpha x_0 + \gamma x_0^3$ folgt

$$\ddot{z}_1 = \omega^2 \left[-\frac{7}{4} z_0 + z_0^3 \right]$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\ddot{z}_3 = \omega^2 \left[-\frac{7}{4} z_2 + z_2^3 \right].$$

Bei der Ausrechnung setzt man vorteilhafterweise

$$\sin \omega t = \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \qquad \text{usw.}$$

Mit $z_0 = \sin \varphi$ folgt dann

$$z_1 = \sin \varphi + \frac{1}{36} \sin 3\varphi,$$

$$z_2 = \left[1 + \frac{1}{48} - \frac{1}{24.36} \right] \sin \varphi + \left[\frac{1}{36} \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{3}{36^3} \right) + \frac{7}{36^2} \right] \sin 3\varphi$$
$$+ \frac{1}{1200} \cdot \frac{35}{36} \sin 5\varphi + \frac{3}{4.36^2.49} \sin 7\varphi + \frac{1}{4.36^3 81} \sin 9\varphi.$$

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$1 + \frac{1}{48} - \frac{1}{24.36} = n, \quad \frac{1}{36} \left[1 + \frac{1}{36} - \frac{3}{36^3} \right] = m, \quad \frac{1}{1200} \cdot \frac{35}{36} = p,$$

[1]) Aus $\frac{\alpha}{\omega^2} = \frac{7}{4}$ folgt, daß die Dauer der endlichen freien Schwingung in diesem Falle das 1,32fache der Dauer der unendlich kleinen Schwingung beträgt. Hieraus ergibt sich der Ausschlag des Pendels. Berechnung siehe Anhang IV, S. 125.

Digitized by Google

so kommen, wenn man sich mit der Genauigkeit von vier Dezimalstellen begnügt, für die beiden ersten Glieder von z_3 nur die folgenden Werte in Betracht:

$$z_3 = \left[\frac{7}{4}n - \frac{3}{4}n^3 + \frac{3}{4}n^2 m - \frac{3}{2}m^2 n + \frac{3}{2}p\,m\,n\right]\sin\varphi$$
$$+ \frac{1}{36}\left[n^3 - 6\,m\,n^2 - 3\,m^2 + 7\,m + 3\,p\,n^2\right]\sin 3\,\varphi.$$

Berücksichtigt man lediglich die Glieder mit $\sin\varphi$ und $\sin 3\varphi$, so erhält man schließlich folgendes Bild: es ist

$$z_0 = \sin\omega t,$$
$$z_1 = \sin\omega t + 0{,}0278\sin 3\,\omega t,$$
$$z_2 = 1{,}0197\sin\omega t + 0{,}0285\sin 3\,\omega t + \cdots,$$
$$z_3 = 1{,}0103\sin\omega t + 0{,}0300\sin 3\,\omega t + \cdots$$

Man kann daher mit der Konvergenz des Verfahrens auch in diesem Falle recht zufrieden sein, und es hat kaum einen Zweck, bei technischen Anwendungen weiter als bis x_1 zu gehen [entsprechend Gleichung 36)].

Bei Fällen, wo der Wert $\frac{\gamma}{\omega^2}A^2$ größer als 1 ausfällt, ist Vorsicht geboten. Dann ist aber meistens ω sehr klein; für solche Fälle beansprucht unsere Untersuchung keine Gültigkeit. Da unsere Betrachtungen sich auf die Nachbarschaft der Resonanz beschränken, so dürfte sich eine Unterschreitung des Wertes $\frac{\omega^2}{\alpha} = \frac{1}{2}$ kaum als notwendig herausstellen.

Um eine Übersicht über die Wurzeln der kubischen Gleichung 37) für A zu erhalten, stellen wir die beiden Seiten dieser Gleichung

$$\zeta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)A - \frac{k}{\alpha} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3$$

in einem rechtwinkligen Koordinatensystem A, ζ als Kurven dar, so daß die Wurzeln A als Abszissen der Schnittpunkte der Geraden

$$\zeta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)A - \frac{k}{\alpha}$$

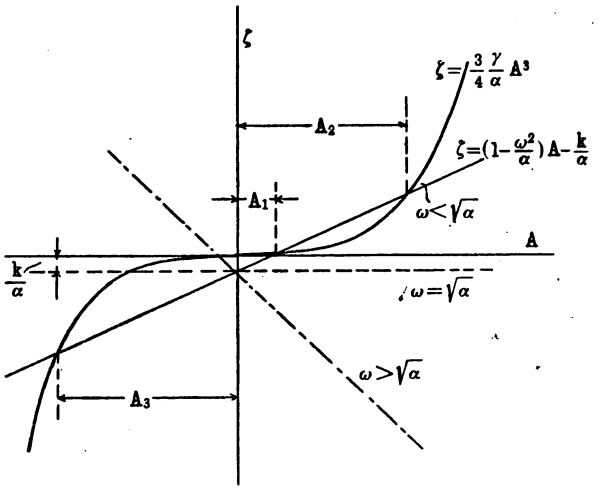
mit der kubischen Parabel

$$\zeta = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3$$

Digitized by Google

erscheinen. Man erhält dann die ohne weiteres verständliche Fig. 4, aus der folgendes zu ersehen ist: Für $\omega = \sqrt{\alpha}$ und $\omega > \sqrt{\alpha}$ liefert jedes k nur ein einziges A; für $\omega < \alpha$ hängt es von der Größe von k ab, ob 37) eine oder drei reelle Wurzeln hat. Daraus ergibt sich folgendes, auf den ersten Anschein merkwürdige Verhalten des Systems. Hat das System unter der Einwirkung der erregenden Kraft $k \sin \omega t$ den periodischen Bewegungszustand angenommen, der annähernd mit der harmonischen Schwingung $A_1 \sin \omega t$ übereinstimmt (Konvergenz des Prozesses vorausgesetzt), und steigert man ganz allmählich (streng:

Fig. 4.



unendlich langsam) die Frequenz ω der Erregung bei konstantem k, so wächst der Ausschlag zunächst langsam, bis bei einem gewissen Werte von ω die periodische Bewegung aufhört und nach Verlauf längerer Zeit unter dem Einflusse von wenn auch noch so kleinen Bewegungswiderständen sich die annähernd harmonische Schwingung von entgegengesetzter Phase und dem größeren Ausschlag A_3 einstellt.

Dasselbe Verhalten zeigt sich, wenn man bei unverändertem ω allmählich die Erregung k steigert.

Dieses Ergebnis der Rechnung wurde durch den noch zu besprechenden Versuch in jeder Beziehung bestätigt.

Digitized by Google

13. Für $k = 0$ ergibt Gleichung 24) die freien Schwingungen. In diesem Falle zeigt demgemäß unsere Fig. 4 annähernd den Zusammenhang zwischen Amplitude und Schwingungsdauer.

Da aber die Lösung der Gleichung 3), die den Verlauf der freien Schwingungen mit jeder gewünschten Genauigkeit darstellt, durch 17) gegeben ist, so haben wir ein einfaches Mittel, um die Richtigkeit unserer Überlegungen summarisch zu kontrollieren.

Bemerkt sei noch, daß Formel 35), S. 40, mit Hilfe des Wertes $\xi = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3$ die übersichtlichere Gestalt

$$\frac{x_2}{A} = \left\{1 + \frac{1}{27}\frac{\alpha^2}{\omega^4}\frac{\xi^2}{A^2} - \frac{2}{729}\frac{\alpha^3}{\omega^6}\frac{\xi^3}{A^3}\right\}\sin\omega t$$
$$+ \frac{1}{27}\frac{\alpha}{\omega^2}\frac{\xi}{A}\left\{1 + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{2}{9}\frac{\alpha}{\omega^2}\frac{\xi}{A} - \frac{1}{6561}\frac{\alpha^3}{\omega^6}\frac{\xi^3}{A^3}\right\}\sin 3\omega t + \cdots$$

annimmt. Hieraus ist deutlich zu erkennen, daß der Grad der Annäherung lediglich von den Werten $\frac{\alpha}{\omega^2}$ und $\frac{\xi}{A}$ und nicht von dem absoluten Wert des Koeffizienten A abhängt.

Für die freie Schwingung ist mit $k = 0$

$$\frac{\xi}{A} = 1 - \frac{\omega^2}{\alpha}.$$

Daher sind in diesem Falle die Quotienten $\frac{x_1}{A}, \frac{x_2}{A} \cdots$ von γ unabhängig, während die Größen x selbst, ebenso wie A, durch γ mit bestimmt werden.

An einem Zahlenbeispiel läßt sich dies am besten zeigen. Wir wählen ein Fadenpendel, dessen Linse unter dem Einflusse einer harmonischen Tangentialkraft steht. Die genaue Bewegungsgleichung eines solchen Pendels lautet

$$L\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\sin\psi = k\sin\omega t$$

oder mit $L\psi = x$

$$\ddot{x} + g\sin\frac{x}{L} = k\sin\omega t.$$

Ersetzt man näherungsweise den $\sin\frac{x}{L}$ durch die ersten Glieder $\frac{x}{L} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{L^3}$ seiner Potenzreihe, so hat man die Gleichung

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}\cdot x - \frac{1}{6}\frac{g}{L^3}x^3 = k\sin\omega t \qquad 38)$$

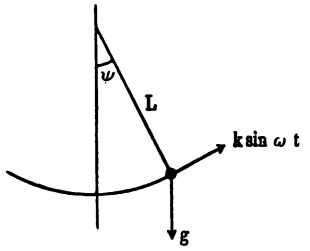
Digitized by Google

n Übereinstimmung mit Gleichung 24), wenn

$$\alpha = \frac{g}{L}, \quad \gamma = \frac{1}{6}\frac{g}{L^3}$$

;esetzt wird. Man hat $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{6L^2}$ und ist damit in der Lage, den Unterschied zwischen 35) und 36) abzuschätzen, wenn man $\frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}$ ungefähr zu Eins annimmt. Man ersieht, daß eine Korrektur der Formel 36) für $A < 2L$ noch nicht notwendig ist, wenigstens nicht bei der Anwendung auf technische Probleme.

Fig. 5.



Unser Zahlenbeispiel sei mit dem Werte $v = \sqrt{gL}$ [Formel 9), S. 25] durchgerechnet. Beim Kreispendel[1]) würde diesem v ein Ausschlag von $\psi = 60^0$ entsprechen. Die genaue Behandlung der Gleichung 38) für $k = 0$ ergibt mit $\frac{\gamma v^2}{\alpha^2} = \frac{1}{6}$ die Wurzeln:

$$x_1 = 3{,}3014\,L, \quad x_2 = -3{,}3014\,L, \quad x_3 = 1{,}0493\,L, \quad x_4 = -1{,}0493\,L.$$

Aus den Beziehungen

$$e_1 - e_3 = 1,$$

$$e_2 - e_3 = \frac{1{,}0493^2}{3{,}3014^2} = 0{,}10102,$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

folgt dann

$$e_1 = 0{,}63299, \quad e_2 = -0{,}26599, \quad e_3 = -0{,}36701.$$

Mit $\sqrt[4]{e_1 - e_2} = 0{,}97378$ ergibt sich $l = 0{,}013284$,

$$h = 0{,}006642.$$

Die reelle Periode folgt aus

$$\frac{2\omega_1}{\pi} = (1 + 2h)^2 = 1{,}013284^2 = 1{,}0268$$

Dem Werte $t = 0$ entspricht

$$u = 0, \quad s = \wp(0) = \infty, \quad x = 0.$$

[1]) Wegen der freien Schwingungen des Kreispendels siehe Anhang IV, S. 125.

Digitized by Google

Der maximale Wert von x ergibt sich für $u = \omega_1$ mit

$$s = \wp(\omega_1) = e_1, \quad x = x_3 = 1{,}0493\, L.$$

Der Ausschlag wäre also $1{,}0493\, L$ gegenüber $1{,}0472\, L$ beim Kreispendel.

Die Annäherungsrechnung nach unserer Formel 10), S. 26 ergibt mit $a = L$, $c = L\sqrt{12}$ die Wurzeln

$$x_1 = 3{,}3198\, L, \quad x_2 = -3{,}3198\, L, \quad x_3 = L, \quad x_4 = -L.$$

Die Abweichungen gegenüber den genauen Werten sind groß, schon weil der Wert $\frac{\gamma v^2}{\alpha^2} = \frac{1}{6}$ nicht mehr unseren Voraussetzungen für die Annäherung entspricht.

Die Probe auf die Brauchbarkeit der Formeln 36) und 37) S. 40 für Ausschläge dieser Größe (im Falle $k = 0$) ergibt dann folgendes: Der reellen Periode der $\wp$-Funktion $2\omega_1 = \pi . 1{,}0268$ entspricht die Schwingungszeit

$$T = \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2}\, 3{,}3014\, L}} = 1{,}0774 . 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

(nach der genauen Rechnung).

Die Kreisfrequenz $\frac{2\pi}{T}$, die wir mit ω bezeichnen, ergibt sich zu

$$\omega = 0{,}9280 \sqrt{\frac{g}{L}} = 0{,}9280 \sqrt{\alpha}.$$

Aus Formel 37) folgt der hierzu gehörige Koeffizient

$$A = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)} = 1{,}0539\, L.$$

Mit $\gamma = \frac{1}{6}\frac{g}{L^3}$ ergibt sich dann nach Formel 36) der größte Ausschlag zu

$$1{,}0539\, L - 0{,}0060\, L = 1{,}0479\, L$$

gegenüber $1{,}0493\, L$ bei der genauen Rechnung.

Hätte man in Gleichung 38), S. 44, das letzte Glied der linken Seite vernachlässigt, d. h. die Bewegung als harmonisch behandelt, so hätte man einen größten Ausschlag $1{,}0000\, L$ erhalten.

Die Annäherung ist also sehr gut, und selbst bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von 36) bleibt der Fehler noch gering.

Digitized by Google

Die Anwendung der Formel 21), S. 30 ist auf sehr kleine Werte h $\left(\text{etwa } \frac{1}{1000}\right)$ beschränkt, d. h. bei ihrer Anwendung auf das Kreispendel nur für Ausschläge unter 30° (nach jeder Seite). Bei anderen Systemen ist stets zuerst durch Ermittelung von $\gamma \frac{v^2}{\alpha^2}$ zu prüfen, ob die Vereinfachungen, auf denen die Herleitung von 21) beruhte, zulässig sind. Ist dies nicht der Fall, so empfehlen sich die Formeln 35), 36) und 37), S. 40, die wohl für alle technischen Aufgaben genügen dürften.

Wir sind hiermit zum Abschluß der Untersuchung der stationären Schwingungen des symmetrischen pseudoharmonischen Systems gelangt. Einige Probleme des Maschinenbaues verlangen aber eine Ausdehnung dieser Betrachtung auf unsymmetrische Systeme, der wir uns nun zuwenden wollen.

Unsymmetrischer Fall ($\beta \neq 0$, $\gamma = 0$).

14. Wir gehen nun über zur Behandlung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \beta x^2 = 0 \qquad 2)$$

für die freie Schwingung. Hier steht also x^2 an Stelle von x^3 in 3), Nr. 8, S. 25. Dabei treten nur geringfügige Abänderungen des vorigen Rechnungsganges ein.

Die Anfangsbedingungen seien wieder

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{für } t = 0.$$

Es folgt

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 - \alpha x^2 + \frac{2}{3}\beta x^3, \qquad 39)$$

wo

$$v^2 = v_0^2 + \alpha x_0^2 - \frac{2}{3}\beta x_0^3.$$

Da hier die rechte Seite von 39) nur vom dritten Grade ist, wird die Transformation auf die Normalform vereinfacht.

Wir setzen

$$\frac{v}{\sqrt{\alpha}} = a, \quad \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\beta} = b; \qquad 40)$$

Digitized by Google

dann erhält die rechte Seite von 39) die Form

$$\frac{2}{3}\beta(x^3 - bx^2 + a^2 b) = R(x). \qquad 41)$$

Die Größe a wird als klein gegen b vorausgesetzt ($v << \sqrt{\alpha}$, $\beta << \alpha$).

Für die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ erhält man dann leicht die Reihenentwickelungen[1]):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b - \frac{a^2}{b} - 2\frac{a^4}{b^3} - \cdots \\ x_2 &= a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} + \frac{5}{8}\frac{a^3}{b^2} + \frac{a^4}{b^3} + \cdots \\ x_3 &= -a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} - \frac{5}{8}\frac{a^3}{b^2} + \frac{a^4}{b^3} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad 42)$$

Die Gleichung 39) erhält alsdann die Form

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{3}\beta(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Auf die Normalform führt in diesem Falle die einfache Substitution

$$x - x_1 = N(s - e_1),\quad x - x_2 = N(s - e_2),\quad x - x_3 = N(s - e_3) \qquad 43)$$

wo $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ist und wo über die Konstante N noch verfügt werden kann.

Aus den Beziehungen

$$N(e_2 - e_3) = x_2 - x_3,\quad N(e_3 - e_1) = x_3 - x_1,\quad N(e_1 - e_2) = x_1 - x_2$$

---

[1]) Um die Reihenentwickelungen 42) für die Wurzeln von $x^3 - bx^2 + a^2 b = 0$, wo $a << b$ vorausgesetzt wird, zu finden, substituiere man $x = by$. Dann geht die Gleichung über in

$$y^3 - y^2 + \frac{a^2}{b^2} = 0$$

oder

$$y^3 - y^2 + \zeta^2 = 0 \quad \text{mit } \zeta = \frac{a}{b}.$$

Für $\zeta = 0$ hat man

$$y_1 = 1,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 0.$$

Für kleine ζ kann man dann die Potenzreihen

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots \\ y_{2,3} &= b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + \cdots \end{aligned}$$

ansetzen und nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten die $a_1 a_2 \cdots b_1 b_2$ ermitteln. Dann erhält man das in 42) gegebene Resultat.

Digitized by Google

olgt dann

$$\left.\begin{aligned} 3Ne_1 &= 2b - 3\frac{a^2}{b} - 6\frac{a^4}{b^3} \\ 3Ne_2 &= -b + 3a + \frac{3}{2}\frac{a^2}{b} + \frac{15}{8}\frac{a^3}{b^2} + 3\frac{a^4}{b^3} \\ 3Ne_3 &= -b - 3a + \frac{3}{2}\frac{a^2}{b} - \frac{15}{8}\frac{a^3}{b^2} + 3\frac{a^4}{b^3} \end{aligned}\right\} \quad 44)$$

Aus 43) ergibt sich unmittelbar

$$3x - (x_1 + x_2 + x_3) = 3Ns$$

ınd damit

$$x = Ns + \frac{b}{3}, \quad s = \frac{x}{N} - \frac{b}{3N} \quad 45)$$

Gemäß 44) ist

$$3N(e_1 - e_3) = 3b + 3a - \frac{9}{2}\frac{a^2}{b} + \frac{15}{8}\frac{a^3}{b^2} - 9\frac{a^4}{b^3} + \cdots$$

Wählt man nun

$$N = b + a - \frac{3}{2}\frac{a^2}{b} + \frac{5}{8}\frac{a^3}{b^2} - 3\frac{a^4}{b^3} + \cdots \quad 46)$$

o wird $e_1 - e_3 = 1$.

Für den Wert $e_1 - e_2$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \frac{1 - \frac{a}{b} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2} - \frac{5}{8}\frac{a^3}{b^3} - 3\frac{a^4}{b^4} + \cdots}{1 + \frac{a}{b} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2} + \frac{5}{8}\frac{a^3}{b^3} - 3\frac{a^4}{b^4} + \cdots} \\ &= 1 - 2\frac{a}{b} + 2\frac{a^2}{b^2} - \frac{25}{4}\frac{a^3}{b^3} + \cdots \\ \sqrt[4]{e_1 - e_2} &= 1 - \frac{1}{2}\frac{a}{b} + \frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2} - \frac{5}{4}\frac{a^3}{b^3} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad 47)$$

Endlich ist noch zu substituieren $t = u\sqrt{\frac{6}{\beta N}}$, so daß die anonische Form erscheint

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3), \quad 48)$$

leren allgemeines Integral

$$s = \wp(u + C) \quad 49)$$

st.

Digitized by Google

Die willkürliche Konstante bestimmt sich aus der Anfangsbedingung $x = x_0$ für $t = 0$ oder

$$s = s_0 = \frac{x_0}{N} - \frac{b}{3N} \qquad \text{für} \qquad u = 0.$$

Nehmen wir $x_0 = 0$ an, so wird $s_0 = -\frac{b}{3N}$ für $u = 0$. Es muß also

$$\wp(C) = -\frac{b}{3N}$$

sein. Schließlich ist nach 45)

$$x = N\wp(u + C) + \frac{b}{3}.$$

Der Wert von $\wp(C)$ ist reell und liegt nach 44) zwischen e_1 und e_3; die Konstante C hat daher einen komplexen Wert, und es kann

$$C = C' + \omega_3$$

gesetzt werden, wo C' eine reelle Konstante bedeutet, deren Wert zwischen 0 und ω_1 liegt. Für die folgenden Entwickelungen setzen wir die Größe $\frac{a}{b}$ kleiner als $\frac{1}{150}$ voraus, so daß nur die ersten Glieder der Reihen in Betracht kommen.

Wir schreiben

$$x = N[\wp(u + C' + \omega_3) - e_3] - a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b}$$

oder

$$x = N\frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp(u + C') - e_3} - a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} \quad \text{[Schwarz F., Art. 19, 5)]}$$

$$x = 2a\frac{\sigma^2(u + C')}{\sigma_3^2(u + C')} - a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} \quad \text{[Schwarz F., Art. 21, 1)]} \quad 5$$

Die Einführung der ϑ-Reihen nach Art. 45, Formel 3) bis 1 (Schwarz F.) ergibt:

$$l = \frac{1}{4}\frac{a}{b} \qquad h = \frac{1}{8}\frac{a}{b},$$

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = 1 + 2h, \quad \frac{2\omega_1}{\pi} = 1 + 4h + 4h^2.$$

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = (1 + 2h - h^2)\frac{\sin v\pi - h^2 \sin 3v\pi}{1 - 2h\cos 2v\pi} \quad 5$$

$$v = \frac{u}{2\omega_1} = \frac{u}{\pi(1 + 4h + 4h^2)} \quad 5$$

Digitized by Google

An Stelle der Variabeln u tritt gemäß 50) $u + C'$, es ist also einzusetzen:

$$v\pi = \frac{u + C'}{1 + 4h + 4h^2} = \frac{t + C''}{1 + 4h + 4h^2} \sqrt{\frac{\beta N}{6}},$$

wo C'' eine neue reelle Konstante bedeutet.

Nun ist nach 40) $\beta = \frac{3}{2}\frac{\alpha}{b}$, daher

$$\frac{1}{6}\beta N = \frac{1}{4}\alpha\left(1 + \frac{a}{b} - \frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2} + \cdots\right) = \frac{\alpha}{4}[1 + 8h - 96h^2],$$

wenn $\frac{a}{b} = 8h$ eingeführt wird. Daraus folgt

$$v\pi = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\,(1 - 60h^2)\,(t + C'')$$

und schließlich

$$x = 2a\,(1 + 2h - h^2)^2 \left[\frac{\sin\mu\,(t + C'') - h^2 \sin 3\mu\,(t + C'')}{1 - 2h\cos 2\mu\,(t + C'')}\right]^2 \cdot$$
$$- a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b},$$

wo
$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\,(1 - 60h^2)\cdot$$

Unter Berücksichtigung von Gliedern der Ordnung h^2 folgt dann schließlich:

$$x = 12\frac{\alpha}{\beta}\,h\,[6h - \cos\{\sqrt{\alpha}\,(1 - 60h^2)\,(t + C'')\}$$
$$- 2h\cos\{2\sqrt{\alpha}\,(1 - 60h^2)\,(t + C'')\}],$$

oder wenn wir die willkürliche Konstante $C'' = \frac{\pi}{4\mu}$ setzen, was uns freisteht,

$$\left.\begin{aligned} x = 12\frac{\alpha}{\beta}\,h\,[6h + \sin\{\sqrt{\alpha}\,(1 - 60h^2)\,t\} \\ + 2h\cos\{2\sqrt{\alpha}\,(1 - 60h^2)\,t\}] \end{aligned}\right\} \qquad 53)$$

Wird das Resultat 53) in die Differentialgleichung eingeführt, so wird sie durch die entstehenden Glieder mit h^3 nicht mehr befriedigt, während die Glieder mit h und h^2 ihr genügen.

Die Schwingung ist nicht symmetrisch zur Mittellage, was vorauszusehen war, da das Kraftfeld $\alpha x - \beta x^2$ nicht symmetrisch zum Anfangspunkt ist.

Digitized by Google

15. Wir suchen nun ganz analog der Behandlung des symmetrischen Falles eine periodische Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \beta x^2 = k \sin \omega t \qquad 54)$$

für die erzwungene Schwingung durch die Methode der sukzessiven Näherung zu gewinnen.

Da die Schwingung nicht symmetrisch zum Nullpunkt ist, machen wir für den ersten Näherungswert die Annahme:

$$x_0 = A \sin \omega t + B,$$

wo A und B Konstanten bedeuten, über die zu verfügen wir uns vorbehalten.

Aus $\ddot{x}_1 = k \sin \omega t - \alpha x_0 + \beta x_0^2$ erhalten wir den Wert:

$$\ddot{x}_1 = k \sin \omega t - \alpha [A \sin \omega t + B] + \beta [A \sin \omega t + B]^2$$

$$= [k - \alpha A + 2 \beta A B] \sin \omega t - \beta \frac{A^2}{2} \cos 2 \omega t - \alpha B + \beta \frac{A^2}{2} + \beta B^2.$$

Damit x_1 periodisch bleibt, muß

$$\beta B^2 - \alpha B + \beta \frac{A^2}{2} = 0 \qquad 55)$$

sein. Es folgt dann:

$$x_1 = - \frac{k - \alpha A + 2 \beta A B}{\omega^2} \sin \omega t + \frac{\beta A^2}{8 \omega^2} \cos 2 \omega t + C, \qquad 56)$$

wo C eine neue verfügbare Konstante ist.

Wir setzen nunmehr den Faktor von $\sin \omega t$ in 56)

$$- \frac{k - \alpha A + 2 \beta A B}{\omega^2} = A$$

oder

$$(\alpha - \omega^2) A - 2 \beta A B = k. \qquad 57)$$

Die Beziehungen 55) und 57) genügen zur Bestimmung der Konstanten A und B.

Aus dem ersten Näherungswert

$$x_1 = A \sin \omega t + \frac{\beta A^2}{8 \omega^2} \cos 2 \omega t + C, \qquad 56a)$$

Digitized by Google

er von derselben Form, wie das Resultat 53) ist, erhalten wir:

$$\ddot{x}_2 = k \sin \omega t - \alpha \left[A \sin \omega t + \frac{\beta A^2}{8 \omega^2} \cos 2 \omega t + C \right] + \beta \left[A \sin \omega t + \frac{\beta A^2}{8 \omega^2} \cos 2 \omega t + C \right]^2.$$

Wir benutzen die Beziehungen

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2 \omega t}{2}, \quad \cos^2 2 \omega t = \frac{1 + \cos 4 \omega t}{2},$$

$$2 \sin \omega t \cos 2 \omega t = \sin 3 \omega t - \sin \omega t$$

ınd finden, daß die Bedingung

$$\beta C^2 - \alpha C = - \frac{\beta A^2}{2} - \frac{\beta^3 A^4}{128 \omega^4} \qquad 58)$$

erfüllt sein muß, damit x_2 periodisch ausfällt. Es ergibt sich der nächstfolgende Näherungswert:

$$x_2 = \frac{1}{\omega^2} \left[\alpha A - k + \frac{\beta^2 A^3}{8 \omega^2} - 2 \beta A C \right] \sin \omega t - \frac{\beta^2 A^3}{72 \omega^4} \sin 3 \omega t + \frac{1}{4 \omega^2} \left[\alpha \beta \frac{A^2}{8 \omega^2} + \frac{\beta A^2}{2} - \frac{\beta^2 A^2 C}{4 \omega^2} \right] \cos 2 \omega t - \frac{\beta^3 A^4}{128 . 16 \omega^6} \cos 4 \omega t + D.$$

Der neue Koeffizient von $\sin \omega t$ läßt sich mit Rücksicht auf 57) schreiben:

$$\frac{1}{\omega^2} \left[\alpha A - k + \frac{\beta^2 A^3}{8 \omega^2} - 2 \beta A C \right] = \frac{1}{\omega^2} \left[A \omega^2 + 2 \beta A B - 2 \beta A C + \frac{\beta^2 A^3}{8 \omega^2} \right] = A + \frac{2 \beta}{\omega^2} A (B - C) + \frac{\beta^2 A^3}{8 \omega^4}.$$

Wenn C aus 58) bestimmt ist, steht auch der Wert von x_2 fest. Aus dem Vergleich von 58) mit 55) ist zu ersehen, daß der Wert C mit dem Werte B um so genauer übereinstimmt, je kleiner der absolute Betrag von $\frac{\beta^3 A^4}{\omega^4}$ ausfällt. Der Koeffizient von $\sin \omega t$ bleibt demnach bei x_2 nahezu derselbe wie bei x_1.

Zur Bestimmung der Konstanten A und B entnehmen wir aus 55):

$$B = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{A^2}{2}},$$

Digitized by Google

dann ergibt 57)

$$(\alpha - \omega^2)\, A - k = A\left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\,\beta^2 A^2}\right]$$

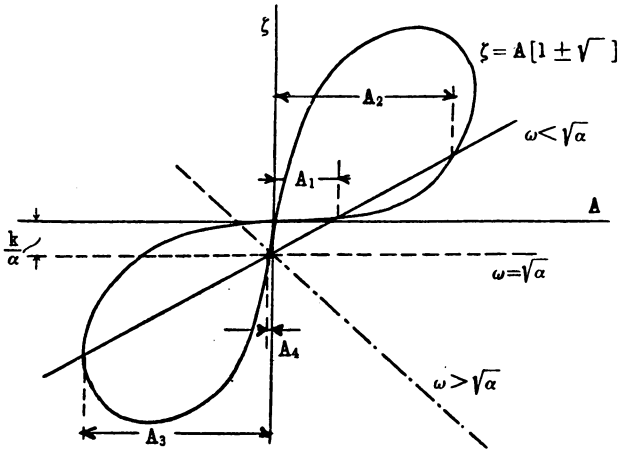
oder

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A - \frac{k}{\alpha} = A\left[1 \pm \sqrt{1 - 2\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\,A^2}\right]. \qquad 59)$$

Die Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung ergeben sich hier aus den Schnittpunkten der

$$\left.\begin{aligned} &\text{Geraden } \zeta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A - \frac{k}{\alpha} \\ &\text{mit der Kurve } \zeta = A\left[1 \pm \sqrt{1 - 2\,\frac{\beta^2}{\alpha^2}\,A^2}\right] \end{aligned}\right\} \qquad 60)$$

Fig. 6.



Die zweite der Gleichungen 60) ergibt eine schleifenförmige Kurve (Fig. 6), die von der Geraden

$$\zeta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A - \frac{k}{\alpha}$$

in vier Punkten geschnitten wird (imaginäre Schnittpunkte eingerechnet). Wenn die Werte A_1, A_2, A_3, A_4 gefunden sind, so sind die zugehörigen B nach 57) eindeutig bestimmt. Es ist

$$B = \frac{(\alpha - \omega^2)\, A - k}{2\,\beta\, A} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\zeta}{A} \qquad 61)$$

mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen 60).

Digitized by Google

Wie man aus 61) ersieht, entspricht dem kleinsten Werte A_4 der größte Wert B_4. Bei kleinem β, also großem $\frac{\alpha}{\beta}$, wie hier durchweg vorausgesetzt, ergeben die Werte A_4, B_4 eine Schwingung um ein vom Koordinatenanfangspunkt weit entferntes Zentrum, falls der Näherungsprozeß mit diesen Werten konvergiert. Dieser Fall ist von unserer Betrachtung ausgeschlossen, da wir nur Schwingungszustände in der Nähe der Gleichgewichtslage $x = 0$ untersuchen wollen. Es kann daher das positive Vorzeichen der Quadratwurzel in Formel 60), da es nur für den Wert A_4 in Frage kommt (wie ohne weiteres aus Fig. 6 ersichtlich), durchweg unberücksichtigt bleiben.

Im Falle sehr kleiner Werte β kann die zweite Gleichung 60) vereinfacht werden. Es liefert dann

$$\xi = \frac{\beta^2}{\alpha^2} A^3$$

durch den Schnitt mit der Geraden

$$\xi = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A - \frac{k}{\alpha}$$

die Wurzeln A_1, A_2, A_3.

In diesem Falle wird unter Vernachlässigung des Gliedes $\frac{\beta^3 A^4}{128\,\omega^4}$ in 58) $B = C = D$, und der Näherungswert x_2 kann auf die Form

$$\begin{aligned}\frac{x_2}{A} = &\left\{1 + \frac{1}{8}\frac{\alpha^2}{\omega^4}\frac{\xi}{A}\right\}\sin\omega t - \frac{1}{72}\frac{\alpha^2}{\omega^4}\frac{\xi}{A}\sin 3\,\omega t \\ &+ \frac{1}{8}\frac{\alpha}{\omega^2}\sqrt{\frac{\xi}{A}}\left\{1 + \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\omega^2} - \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\omega^2}\frac{\xi}{A}\right\}\cos 2\,\omega t \\ &- \frac{1}{2048}\frac{\alpha^3}{\omega^6}\left(\frac{\xi}{A}\right)^{3/2}\cos 4\,\omega t + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{A}} + \cdots\end{aligned}$$

gebracht werden. Auch hier sind im Falle der freien Schwingung die Quotienten $\frac{x_1}{A}$, $\frac{x_2}{A}\cdots$ usw. unabhängig von β, während die x und A von β abhängen.

Setzt man $k = 0$, so ergibt Gleichung 60) in Verbindung mit 56a) den Zusammenhang zwischen Amplitude und Schwingungsdauer der freien Schwingungen, welcher mit dem Ergebnis

Digitized by Google

der genauen Rechnung vermittelst elliptischer Funktionen annähernd übereinstimmen muß.

Um auch hier ein Bild von der Folge von x_0, x_1, x_2, x_3 zu erhalten, sei zwecks einfacher Zahlenrechnung folgendes Beispiel gewählt:

$$\frac{\omega^2}{\alpha} = \frac{7}{9}, \quad k = 0.$$

Dann folgt aus 57):

$$B = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)$$

und aus 55):

$$A^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - \frac{\omega^4}{\alpha^2}\right)$$

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\alpha}}{1 + \dfrac{\omega^2}{\alpha}} = \frac{1}{16}, \quad \frac{B}{A} = \frac{1}{4} = 0{,}2500,$$

$$B = \frac{1}{9}\,\frac{\alpha}{\beta}, \quad A = \frac{4}{9}\,\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\beta A}{\omega^2} = \frac{\alpha}{\omega^2}\cdot\frac{\beta A}{\alpha} = \frac{9}{7}\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{7}$$

Aus 58) folgt:

$$C^2 - \frac{9}{4}\,A\cdot C = -\frac{197}{392}\,A^2,$$

$$C = A\left[\frac{9}{8} - \sqrt{\frac{81}{64} - \frac{197}{392}}\right] = 0{,}2515\,A,$$

$$z_0 = \frac{x_0}{A} = \sin\omega t + 0{,}2500.$$

$$z_1 = \frac{x_1}{A} = \sin\omega t + 0{,}0714\cos 2\,\omega t + 0{,}2515.$$

Durch einfaches Ausrechnen folgt:

$$z_2 = \frac{x_2}{A} = 1{,}0391\sin\omega t + 0{,}0892\cos 2\,\omega t - 0{,}004\,53\sin 3\,\omega t - 0{,}000\,09\cos 4\,\omega t + D.$$

Damit x_3 periodisch wird, muß sein:

$$D^2 - \frac{\alpha}{\beta}\,D = -\frac{A^2}{2}\,[1{,}0391^2 + 0{,}0892^2 + 0{,}004\,53^2 + \cdots]$$

oder

$$D^2 - \frac{9}{4}\,A\cdot D = -\,0{,}5438\,A^2, \quad D = 0{,}2754\,A.$$

Digitized by Google

Mit dem Werte von D ist dann x_3 zu berechnen.
Die Anfangsglieder sind:

$$z_3 = \frac{x_3}{A} = 1{,}062 \sin \omega t + 0{,}056 \cos 2\omega t + \cdots + E.$$

In diesem Falle sind die Korrekturen, die an den Werten x_0 nd x_1 noch anzubringen sind, größer als in dem analogen Beiiel des symmetrischen Systems. Dies läßt sich eigentlich schon warten aus dem Vergleich von Formel 56a) mit 53) einerseits id 34) mit 21) andererseits in dem speziellen Falle einer freien hwingung von kleiner Amplitude.

Es ist $k = 0$, und es sei $1 - \frac{\omega}{\sqrt{\alpha}} = \varepsilon$ eine verschwindend eine positive Zahl. In diesem Falle sind die Resultate 53) nd 21) genau bis auf Größen, die von höherer Ordnung undlich klein sind als ε^2, und können daher einen Anhalt dafür eben, wie weit die Annäherung von 56a) und 34) geht.

Mit

$$\frac{\omega}{\sqrt{\alpha}} = 1 - \varepsilon, \quad \frac{\omega^2}{\alpha} = 1 - 2\varepsilon, \quad \frac{\omega^4}{\alpha^2} = 1 - 4\varepsilon$$

eht die Formel 56a), wenn man C durch B ersetzt, über in

$$x_1 = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{2\varepsilon} \sin \omega t + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon \cos 2\omega t + \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon.$$

Die Formel 53) ergibt mit $\sqrt{\alpha}(1 - 60h^2) = \omega$

$$h^2 = \frac{1}{60}\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{60}\varepsilon,$$

$$x = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{12}{5}\varepsilon} \sin \omega t + \frac{4}{10} \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon \cos 2\omega t + \frac{12}{10} \frac{\alpha}{\beta} \varepsilon.$$

Die Koeffizienten des Näherungswertes x_1 müssen sich also ei den folgenden Annäherungen schließlich nach oben verändern, ie es auch im vorhergehenden Beispiel der Fall ist.

Der Vergleich von 34) mit 21) ergibt insofern ein angenehmeres Bild, als die Koeffizienten von $\sin \omega t$ genau übereinimmen. Man erhält aus 34a):

$$A^2 = \frac{4\alpha}{3\gamma}\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) = \frac{8\alpha}{3\gamma}\varepsilon$$

Digitized by Google

und damit

$$x_1 = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon \sin \omega t + \frac{1}{9}\sqrt{\frac{32}{27}\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon^{3/2} \sin 3\,\omega t$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3}\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon \sin \omega t + 0{,}121\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon^{3/2} \sin 3\,\omega t.$$

Die Formel 21) ergibt mit $\sqrt{\alpha}\,(1 - 12h) = \omega$

$$h = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{\varepsilon}{12},$$

$$x = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon \sin \omega t + \sqrt{\frac{1}{54}\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon^{3/2} \sin 3\,\omega t$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3}\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon \sin \omega t + 0{,}136\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\,\varepsilon^{3/2} \sin 3\,\omega t.$$

Der allgemeine Fall ($\beta, \gamma \neq 0$).

16. Endlich sei dasselbe Annäherungsverfahren auf die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \sin \omega t \qquad 62)$$

angewandt.

Wir beginnen auch hier mit dem Ansatz

$$x_0 = A \sin \omega t + B \qquad 63)$$

und finden

$$\ddot{x}_1 = \frac{\beta}{2} A^2 - \alpha B + \beta B^2 + \frac{3}{2}\gamma A^2 B + \gamma B^3$$

$$+ \left[k - \alpha A + 2\beta AB + \frac{3}{4}\gamma A^3 + 3\gamma A B^2\right] \sin \omega t$$

$$- \left[\frac{\beta}{2} A^2 + \frac{3}{2}\gamma A^2 B\right] \cos 2\,\omega t - \frac{\gamma}{4} A^3 \sin 3\,\omega t.$$

Damit x_1 periodisch ausfällt, muß in $\ddot{x}_1$ das konstante Glied verschwinden, und wir erhalten:

$$x_1 = -\frac{1}{\omega^2}\left[k - \alpha A + 2\beta AB + \frac{3}{4}\gamma A^3 + 3\gamma A B^2\right] \sin \omega t$$

$$+ \frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\beta}{2} A^2 + \frac{3}{2}\gamma A^2 B\right] \cos 2\,\omega t + \frac{\gamma}{36\,\omega^2} A^3 \sin 3\,\omega t + C.$$

Digitized by Google

Es ergibt sich schließlich:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = A\sin\omega t + \frac{1}{4\omega^2}\left[\frac{\beta}{2}A^2 + \frac{3}{2}\gamma A^2 B\right]\cos 2\omega t \\ + \frac{\gamma}{36\omega^2}A^3\sin 3\omega t + C, \end{aligned}\right\} \quad 64)$$

wobei A und B den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{2}A^2 - \alpha B + \beta B^2 + \frac{3}{2}\gamma A^2 B + \gamma B^3 = 0 \\ -k + (\alpha - \omega^2)A - 2\beta AB - \frac{3}{4}\gamma A^3 - 3\gamma AB^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad 65)$$

genügen müssen.

Um die Wurzeln dieses Paares von Gleichungen zu finden, bringt man diese Gleichungen auf die Form:

$$\left.\begin{aligned} A^2 = 2\,\frac{\alpha B - \beta B^2 - \gamma B^3}{\beta + 3\gamma B} \\ B^2 + \frac{2}{3}\frac{\beta}{\gamma}B = \frac{1}{3\gamma A}\left[-k + (\alpha - \omega^2)A - \frac{3}{4}\gamma A^3\right] \end{aligned}\right\} \quad 66)$$

In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem AB repräsentieren diese Gleichungen zwei Kurven, deren Schnittpunkte die gesuchten Werte von A und B ergeben. Es ist jedoch der Umstand lästig, daß man für jedes neue k und ω wieder neue Kurven zeichnen muß.

Wir suchen deshalb die Gleichungen 65) so umzuformen, daß der Ausdruck $-k + (\alpha - \omega^2)A$ für sich allein auf einer Seite erscheint (wie bei den vorhergehenden Untersuchungen). Wir erhalten aus 65):

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)A - \frac{k}{\alpha} = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3 + AB\left(2\frac{\beta}{\alpha} + 3\frac{\gamma}{\alpha}B\right) \quad 67)$$

wo B als Funktion von A einzuführen ist, gemäß der Gleichung:

$$\gamma B^3 + \beta B^2 - \left(\alpha - \frac{3}{2}\gamma A^2\right)B + \frac{\beta}{2}A^2 = 0 \quad 68)$$

Man hat alsdann, nachdem dies geschehen, die Kurve

$$\left.\begin{aligned} \zeta = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3 + AB\left(2\frac{\beta}{\alpha} + 3\frac{\gamma}{\alpha}B\right) \\ \text{mit der Geraden} \\ \zeta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)A - \frac{k}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad 69)$$

zum Schnitt zu bringen.

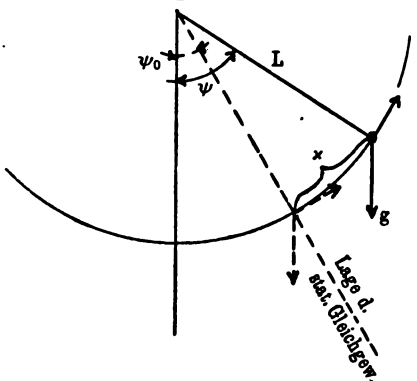
Digitized by Google

Falls der Koeffizient β verschwindet, liefert 68) eine Wurz
$B = 0$, und 69) wird identisch mit 37), S. 40, wie es sein mu
Von den Wurzeln der Gleichung 68) kommt hier nur di
jenige von kleinstem Absolutwert in Betracht, da die beide
anderen wegen ihrer Größe nicht auf Schwingungszustände führe
die zur Gleichgewichtslage $x = 0$ gehören. Bei kleinem β u
γ kann als erste Näherung d
Wert

$$\frac{\beta}{2} \frac{A^2}{\alpha - \frac{3}{2}\gamma A^2}$$

gelten.

Fig. 7.



17. Als erläuterndes Be
spiel wählen wir wieder e
Kreispendel, das unter de
Einfluß einer harmonischen u
einer konstanten Tangential
kraft steht, derart, daß das st
tische Gleichgewicht bei eine
Entfernung von $\psi_0 = 50^0$ aus de
Lotrechten stattfindet (Fig. 7

Die genaue Bewegungsgleichung eines solchen Pendels laute

$$L\ddot{\psi} + g \sin \psi = g \sin \psi_0 + k \sin \omega t.$$

Mit

$$L(\psi - \psi_0) = x$$

erhält man analog zu 38), S. 44, die Gleichung:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \cos \psi_0 \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{L^2} \sin \psi_0 \cdot x^2 - \frac{1}{6} \frac{g}{L^3} \cos \psi_0 \cdot x^3 = k \sin \omega t \quad 7$$

Man hat also:

$$\alpha = \frac{g}{L} \cos \psi_0, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{g}{L^2} \sin \psi_0, \quad \gamma = \frac{1}{6} \frac{g}{L^3} \cos \psi_0,$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{6L^2}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2L} \operatorname{tg} \psi_0.$$

Wir untersuchen eine freie Schwingung ($k = 0$) mit de
Werte:

$$v = 0{,}6043 \sqrt{gL}.$$

Diesem Werte würde beim Kreispendel ein Maximalwert von

$$\psi_1 = \psi_0 + 60^0$$

entsprechen.

Digitized by Google

Die Gleichung

$$v^2 - \alpha x^2 + \frac{2}{3}\beta x^3 + \frac{\gamma}{2} x^4 = 0 \qquad \text{[vgl. 5), S. 24]}$$

immt mit den Werten

$$\psi_0 = 50^0, \quad \alpha = 0{,}6428\,\frac{g}{L}, \quad \beta = 0{,}3830\,\frac{g}{L^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{6} \cdot 0{,}6428\,\frac{g}{L^3},$$

enn noch $\frac{x}{L} = y$ gesetzt wird, die Form

$$\frac{gL}{12} \cdot 0{,}6428\,[y^4 + 4{,}768\,y^3 - 12\,y^2 + 6{,}818] = 0$$

n und ergibt die Wurzeln:

$$y_1 = 1{,}350, \quad y_2 = 1{,}131, \quad y_3 = -0{,}6793, \quad y_4 = -6{,}570.$$

Im Interesse einer einfachen Schreibweise führen wir außer ler neuen Variabeln $y = \frac{x}{L}$ noch die Variable $u = \sqrt{\frac{g}{L}}\,t$ ein nd erhalten dann als erstes Integral unserer Bewegungsgleichung:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \frac{0{,}6428}{12}\,[y^4 + 4{,}768\,y^3 - 12\,y^2 + 6{,}818]$$

$$= \frac{0{,}6428}{12}\,(y - y_1)\,(y - y_2)\,(y - y_3)\,(y - y_4)$$

n Übereinstimmung mit der Form 5a), S. 24.

Die Substitution 6), S. 25 ergibt:

$$s = -\frac{4{,}8118}{y + 6{,}570} + 0{,}683\,06 \quad \text{oder} \quad y = -6{,}570 - \frac{4{,}8118}{s - 0{,}683\,06}.$$

Durch Einsetzen der Werte y_1, y_2, y_3 ergeben sich die Werte:

$$e_1 = 0{,}075\,55, \quad e_2 = 0{,}058\,27, \quad e_3 = -0{,}133\,82,$$

nd damit erhält man die Normalform 7) mit der Lösung

$$s = \wp\,(u + C).$$

Wir bestimmen ferner die Werte:

$$\sqrt[4]{e_1 - e_3} = 0{,}676\,44, \quad \sqrt[4]{e_1 - e_2} = 0{,}362\,55.$$

Hieraus folgt nach Art. 45, 3) bis 17) (Schwarz F.):

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = 0{,}302\,11, \quad h = \frac{1}{2}\,l = 0{,}151\,05$$

$$h^2 = 0{,}022\,82$$

$$h^4 = 0{,}000\,52$$

Digitized by Google

und damit die reelle Periode $2\omega_1$ aus der Beziehung:

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} (1 + 2h^4) = 1{,}926\,96,$$

woraus

$$2\omega_1 = \pi . 3{,}7131.$$

Hiermit ergibt sich die Zeit einer vollen Schwingung zu

$$T = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 2\omega_1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 3{,}7131 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 1{,}8565.$$

Als Anfangsbedingungen setzen wir fest

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v \quad \text{für} \quad t = 0$$

und damit auch

$$y = 0 \text{ für } u = 0.$$

Es entspricht also $u = 0$ dem Werte:

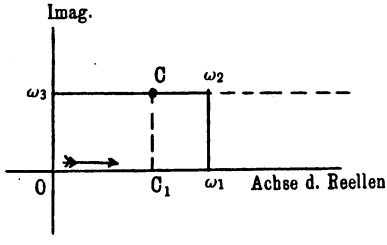
$$s = -\frac{4{,}8118}{6{,}570} + 0{,}683\,06 = -0{,}0493.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C hat man daher:

$$\wp(C) = -0{,}0493.$$

Hieraus kann C ohne Schwierigkeit berechnet werden (vgl. Schwarz F., Art. 48). Für den vorliegenden Zweck ist die Durchführung dieser kleinen Zahlenrechnung nicht notwendig; es genügt zu wissen, daß diese Konstante $C = C_1 + \omega_3$ gesetzt werden kann, wo C_1 eine reelle Konstante bedeutet, deren Wert zwischen 0 und ω_1 liegt. Durchläuft nämlich der den Wert u repräsentierende Punkt der Zahlenebene vom Nullpunkte ausgehend den Umfang des Rechtecks $0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,0$ im Sinne des Pfeiles (Fig. 8), so durchläuft $\wp u$ in stets abnehmendem Sinne alle reellen Werte von $+\infty$ bis $-\infty$, was aus der Abbildung der s-Halbebene auf das Rechteck der u-Ebene durch das Integral erster Art

Fig. 8.



$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}}$$

hervorgeht.

Digitized by Google

In den Punkten ω_1, ω_2, ω_3 hat $\wp u$ die Werte:

$$\wp\,\omega_1 = e_1, \quad \wp\,\omega_2 = e_2, \quad \wp\,\omega_3 = e_3.$$

Nun liegt der Wert von $\wp\,(C)$ zwischen e_2 und e_3, daher
gt der Punkt C auf der Strecke ω_2 bis ω_3, und es ist also
$= C_1 + \omega_3$. Zufolge der Beziehung $u = \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot t$ nimmt u nur
e reellen Werte von 0 bis ∞ an, der Punkt $u + C$ bewegt sich
her auf der durch den Punkt C gehenden zur Achse der
ellen parallelen Geraden. Der Wert $\wp\,(u + C)$ schwankt
her beständig zwischen den Werten:

$$\wp\,\omega_3 = e_3 \quad \text{und} \quad \wp\,\omega_2 = e_2,$$

$s = e_2$ entspricht $y_2 = \quad 1{,}131, \quad x_2 = \quad 1{,}131\,L,$

$s = e_3 \quad$ „ $\quad y_3 = -0{,}6793, \quad x_3 = -0{,}6793\,L,$

ist der Ausschlag des Punktes nach der positiven, x_3 der nach
r negativen Seite, vorausgesetzt, daß die Gleichung 70) (mit
$= 0$) gilt und nicht die genaue Pendelgleichung. (Die Integra-
on der genauen Pendelgleichung liegt bis heute nur für den
ezialfall $\psi_0 = 0$, $k = 0$ vor; vgl. Weierstraß' Werke, Bd. 6,
247, Berlin 1915.)

Wollten wir nur Schwingungsdauer und Ausschlag des
stems ermitteln, so wäre unsere Aufgabe gelöst; wir wollen
er ein Bild über den Verlauf der Schwingung gewinnen und
rmen daher das Resultat

$$s = \wp\,(u + C_1 + \omega_3)$$

ch weiter um.

Wir schreiben:

$$s = \wp\,(u + C_1 + \omega_3) - e_3 + e_3$$

$$= e_3 + \frac{(e_3 - e_1)\,(e_3 - e_2)}{\wp\,(u + C_1) - e_3} \qquad \text{(Schwarz F., Art. 19, 5).}$$

In derselben Weise, wie Formel 50) gewonnen wurde, ergibt
ch weiter:

$$s = e_3 + (e_3 - e_1)\,(e_3 - e_2)\,\frac{\sigma^2(u + C_1)}{\sigma_3^2(u + C_1)}.$$

Bei der zeitlichen Darstellung der Bewegung können wir den
nfangspunkt der Zeit t so legen, daß die reelle Konstante C_1 aus

Digitized by Google

dem Resultate verschwindet. (Die Anfangsbedingungen, mit dene wir jetzt nichts mehr zu tun haben, werden dementsprechen geändert.)

Wir schreiben daher:

$$s = -0{,}13382 + 0{,}04022\,\frac{\sigma^2 u}{\sigma_3^2 u}.$$

Nun ist

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[8]{G}}\,\frac{\vartheta_1(v\,|\,\tau)}{\vartheta_0(v\,|\,\tau)}$$ [Schwarz F., Art. 45, 10) und 13)

Unter Vernachlässigung der Glieder mit h^4, h^5 usf. könne wir setzen

$$\frac{\vartheta_1(v\,|\,\tau)}{\vartheta_0(v\,|\,\tau)} = 2h^{1/4}\,\frac{\sin v\pi - h^2 \sin 3v\pi}{1 - 2h\cos 2v\pi}$$

mit

$$v = \frac{u}{2\omega_1},$$

$$\frac{\sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[8]{G}} = \frac{\omega_1}{\pi}\,h^{-1/4}\,\frac{1-2h}{1-3h^2},$$

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{2\omega_1}{\pi}\,\frac{1-2h}{1-3h^2}\,\frac{\sin v\pi - h^2\sin 3v\pi}{1-2h\cos 2v\pi}.$$

Vermittels der Beziehung

$$\frac{x}{L} = y = -6{,}570 - \frac{4{,}8118}{\zeta - 0{,}68306}$$

kann dann für jeden Bruchteil $\frac{u}{2\omega_1}$ der ganzen Schwingungszei die Stellung x berechnet werden. Für $v = \frac{u}{2\omega_1} = 1$ ist $u = 2\omega$ entsprechend $t = T$.

Mit den Werten

$$\frac{2\omega_1}{\pi} = 3{,}7131,$$

$$\frac{1-2h}{1-3h^2} = 0{,}74919$$

folgt

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = 2{,}7818\,\frac{\sin v\pi - 0{,}02282\sin 3v\pi}{1 - 0{,}30211\cos 2v\pi}.$$

Digitized by Google

Die Resultate der Berechnung sind in der folgenden Tabelle gegeben:

v	$v\pi$	$\frac{\sigma_M}{\sigma_{3M}}$	s	$\frac{x}{L} = y$
0	0°	0	−0,1338	−0,679
$\frac{1}{12}$	15°	0,9143	−0,1002	−0,427
$\frac{2}{12}$	30°	1,5636	−0,0355	0,127
$\frac{3}{12}$	45°	1,9222	0,0148	0,630
$\frac{4}{12}$	60°	2,0930	0,0424	0,941
$\frac{5}{12}$	75°	2,1654	0,0548	1,089
$\frac{6}{12}$	90°	2,1850	0,0582	1,131

Die Zahlen der letzten Reihe ergeben die Kurve I der Fig. 9, e den Verlauf der Bewegung sehr genau darstellt.

18. An Hand dieser Resultate sei nun geprüft, was die Formeln 64) bis 69) als Näherungsformeln leisten. Wir setzen in 9) $k = 0$ und führen die Frequenz ω unserer soeben betrachteten chwingung ein, dann müßten sich Werte von A, B und C ergeben, die, in 64) eingeführt, annähernd dasselbe Bewegungsbild ir Folge haben.

Aus unserem vorherigen Resultate

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 1{,}8565$$

rgibt sich die Kreisfrequenz ω (in 2π Sekunden)

$$\omega = 0{,}5386\sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Wir hatten am Anfang des Beispiels festgestellt

$$\alpha = 0{,}6428\,\frac{g}{L},$$

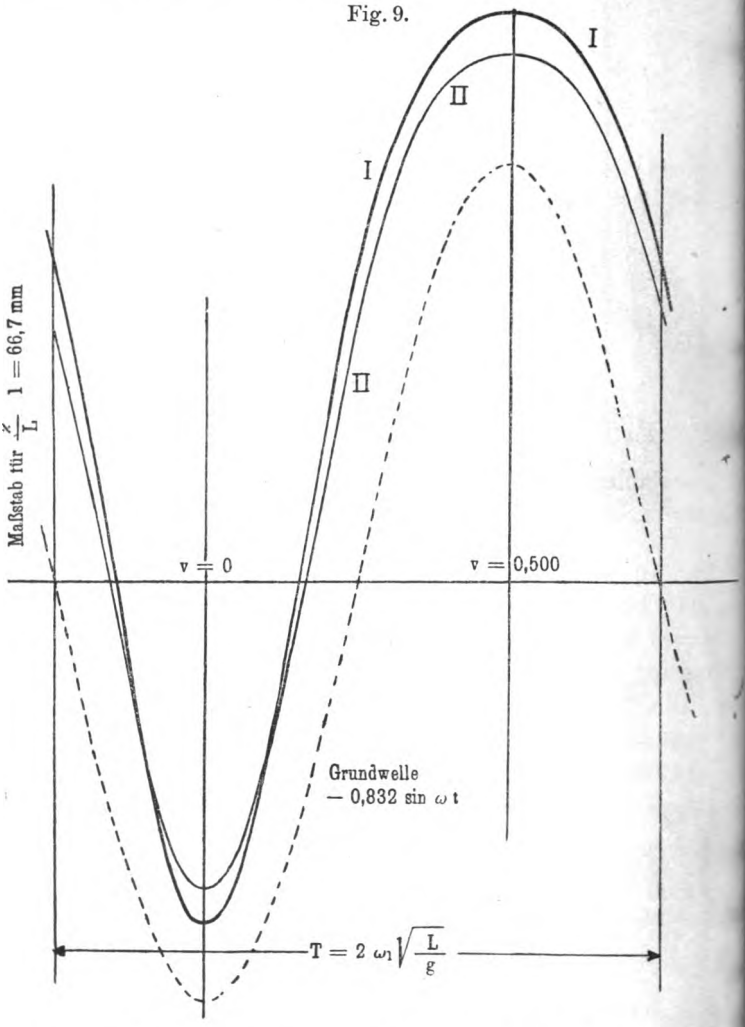
aher

$$\frac{\omega^2}{\alpha} = 0{,}4513, \quad 1 - \frac{\omega^2}{\alpha} = 0{,}5487.$$

Digitized by Google

Den letzten Wert haben wir in 69) einzuführen, die ers
Gleichung 66) noch hinzuzuziehen, um A und B zu erhalten.

Fig. 9.



Wir erledigen die Sache zeichnerisch, indem wir die Kur

$$\xi = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3 + AB\left(2\frac{\beta}{\alpha} + 3\frac{\gamma}{\alpha}B\right)$$

darstellen [Gleichung 69)].

Digitized by Google

Mit den Werten

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{6L^2}, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2L} \operatorname{tg} \psi_0$$

ht diese Gleichung über in

$$\frac{\zeta}{L} = \frac{1}{8}\frac{A^3}{L^3} + \frac{A}{L}\cdot\frac{B}{L}\left(\operatorname{tg}\psi_0 + \frac{1}{2}\frac{B}{L}\right).$$

Die erste Gleichung 66) schreiben wir in der Form

$$\frac{A^2}{L^2} = 4\,\frac{\frac{B}{L} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\psi_0\frac{B^2}{L^2} - \frac{1}{6}\frac{B^3}{L^3}}{\operatorname{tg}\psi_0 + \frac{B}{L}},$$

$\operatorname{tg}\psi_0 = \operatorname{tg} 50^0 = 1{,}192.$

Wir gehen von einer Folge von Werten $\frac{B}{L}$ aus und stellen lgende Tabelle auf:

$\frac{B}{L}$	$\frac{A^2}{L^2}$	$\pm\frac{A}{L}$	$\frac{\zeta}{L}$
0,1	0,2906	0,5385	0,0883
0,2	0,5028	0,7090	0,2277
0,3	0,6482	0,8051	0,3893
0,4	0,7386	0,8593	0,5578
0,5	0,7804	0,8834	0,7230
0,6	0,7810	0,8837	0,8774
0,7	0,7420	0,8614	1,0097

Diese Resultate benutzen wir, um in einem rechtwinkeligen oordinatensystem $\frac{A}{L}$ als Funktion von $\frac{B}{L}$ darzustellen und erhalten die Kurve a (Fig. 10). Ferner stellen wir $\frac{\zeta}{L}$ als Funktion on $\frac{A}{L}$ dar und erhalten so die Kurve c. Wir zeichnen ferner e durch den Koordinatenanfang gehende Gerade

$$\frac{\zeta}{L} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)\frac{A}{L}.$$

Diese bestimmt durch ihren Schnitt P mit c den gesuchten ert A und mit Hilfe der Kurve a den zugehörigen Wert B.

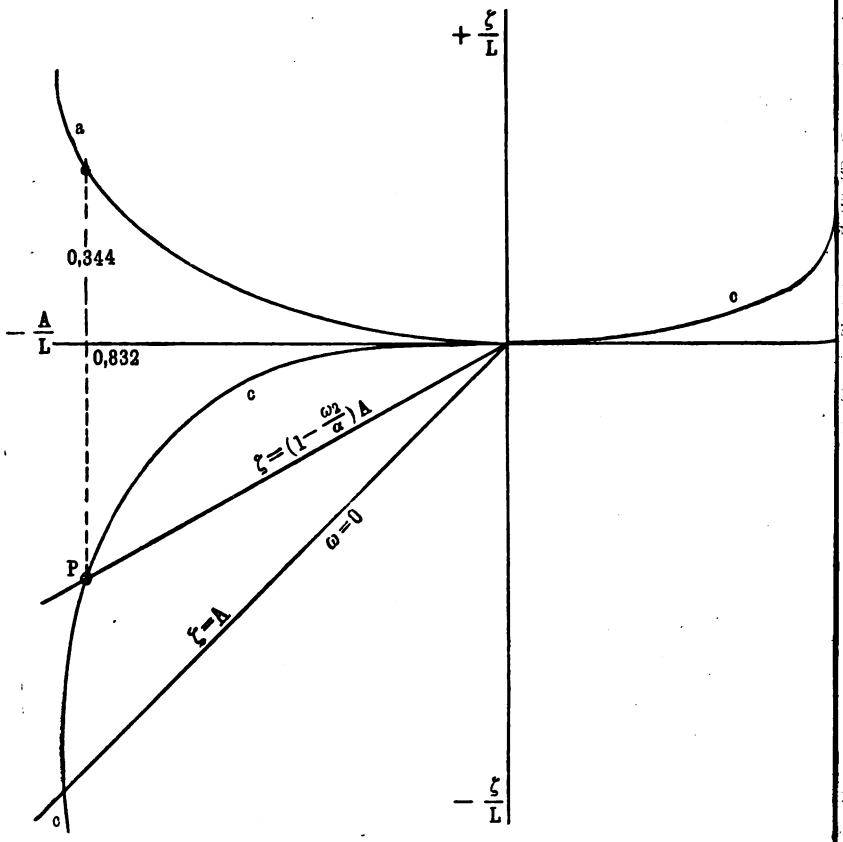
Digitized by Google

Die Zeichnung ergibt

$$\frac{A}{L} = \pm\, 0{,}832, \quad \frac{B}{L} = 0{,}344.$$

Jetzt sind wir imstande, die Koeffizienten der Gleichung 64 (ausgenommen C) auszurechnen. Ob wir A positiv oder negati

Fig. 10.



wählen, ist unerheblich, da hierdurch der Wert x_1 nur insofe beeinflußt wird, als sich der Anfangspunkt der Zeit t verschie

Mit $\frac{A}{L} = -0{,}832$ erhalten wir:

$$\frac{x_1}{L} = -0{,}832 \sin \omega t + 0{,}147 \cos 2\,\omega t - 0{,}006 \sin 3\,\omega t + \frac{C}{L}.$$

Digitized by Google

C bestimmt sich erst dadurch, daß auch der folgende Näherungswert x_2 die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ besitzen soll. Die Bedingung hierfür kann leicht angeschrieben werden, sie lautet:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{C}{L}\right)^3 + 0{,}596\left(\frac{C}{L}\right)^2 - 0{,}822\,\frac{C}{L} + 0{,}212 = 0$$

und ergibt $\frac{C}{L} = 0{,}365$, also wenig verschieden vom $\frac{B}{L}$, wie wohl zu erwarten war.

In unserem Zeitdiagramm (Fig. 9) wird der Verlauf von x_1 durch die Kurve II dargestellt. Die Übereinstimmung mit der genaueren, stark ausgezogenen Kurve I ist in Anbetracht des großen Ausschlages sehr gut, die weiteren Näherungen x_2, x_3 usw werden sich der Kurve I immer enger anschmiegen [1]).

Für technische Zwecke liegt ein Bedürfnis zur Aufsuchung der Werte x_2, x_3 usw. nicht vor, da trotz des erheblichen Mehraufwandes an Rechenarbeit numerisch nur geringfügige, qualitativ gar keine Änderungen eintreten. Im Gegenteil müßte man hierfür das Näherungsverfahren noch einfacher gestalten. Dies ist möglich, wenn der Wert

$$\left|\frac{A}{L}\right| < 0{,}5, \quad \left|\frac{B}{L}\right| < 0{,}1.$$

---

[1]) So ergibt sich in unserem Falle mit den Werten:

$$\frac{x_1}{L} = 0{,}365 - 0{,}832\sin\omega t + 0{,}147\cos 2\omega t - 0{,}006\sin 3\omega t,$$

$$\left(\frac{x_1}{L}\right)^2 = 0{,}4902 - 0{,}4859\sin\omega t - 0{,}2338\cos 2\omega t - 0{,}1267\sin 3\omega t + 0{,}0058\cos 4\omega t - 0{,}000\,88\sin 5\omega t - 0{,}000\,018\cos 6\omega t,$$

$$\left(\frac{x_1}{L}\right)^3 = 0{,}3643 - 0{,}6553\sin\omega t - 0{,}1608\cos 2\omega t + 0{,}0147\sin 3\omega t - 0{,}0689\cos 4\omega t - 0{,}0113\sin 5\omega t - 0{,}000\,32\cos 6\omega t$$

der weitere Näherungswert:

$$\frac{x_2}{L} = \frac{D}{L} - 0{,}960\sin\omega t + 0{,}173\cos 2\omega t + 0{,}016\sin 3\omega t + 0{,}0011\cos 4\omega t + 0{,}000\,21\sin 5\omega t + 0{,}000\,004\cos 6\omega t.$$

Die Konstante D muß so bestimmt werden, daß auch x_3 wieder eine periodische Funktion wird.

Mit dem Werte $\frac{D}{L} = 0{,}380$ ergibt die Zeichnung, daß die Annäherung besser ist als bei x_1, daß die Annäherungskurve aber Ordinaten von größerem absoluten Wert hat, als die wirkliche Kurve.

Digitized by Google

Läßt man in diesem Falle in Gleichung 65) die Glieder m
B^2 und B^3 weg, so ergibt sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\beta}{2} A^2 - \alpha B + \frac{3}{2} \gamma A^2 B = 0 \\ -k + (\alpha - \omega^2) A - 2\beta A B - \frac{3}{4} \gamma A^3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad 70a$$

die einfache Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A - \frac{k}{\alpha} = A^3 \left[\frac{3}{4} \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{1 - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\alpha} A^2} \right] \\ B = \frac{A^2}{2} \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{1 - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\alpha} A^2} \end{aligned}\right\}. \quad 71$$

Für unser Pendel wird hieraus entnommen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\zeta}{L} = \frac{A^3}{L^3} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg}^2 \psi_0}{1 - \frac{1}{4} \frac{A^2}{L^2}} \right], \quad \frac{B}{L} = \frac{1}{4} \frac{A^2}{L^2} \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{1 - \frac{1}{4} \frac{A^2}{L^2}} \\ \text{Schnittgerade } \frac{\zeta}{L} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) \frac{A}{L} - \frac{1}{L} \frac{k}{\alpha} \end{aligned}\right\}. \quad 72$$

Bei näherer Betrachtung zeigt sich, daß 72) für ein be
stimmtes ω den Wert von A etwas zu groß ergibt, also m
besserer Annäherung an die genaue Lösung (im Spezialfall $k =$ (
als 69). Der Wert von B wird nach 72) zu klein mit größere
Abweichung von der genauen Lösung als bei 69). Sofern es nu
auf Ermittelung des Koeffizienten des ersten Gliedes von 64) an
kommt, kann daher das einfache Resultat 72) ohne Bedenke
verwendet werden.

Ergebnisse.

19. Als Ergebnis unserer Untersuchung dürfen wir nu
folgendes feststellen:

Wir haben auf elementarem Wege Annäherungslösunge
für die Differentialgleichung 1 a), S. 23 gewonnen, die die Period
$T = \frac{2\pi}{\omega}$ besitzen; diese Lösungen gelten im Spezialfall $k =$

Digitized by Google

ich für die Gleichung 1) S. 23 und sind in einzelnen Fällen mit rengen Lösungen dieser Gleichung gegeneinander gehalten orden, wobei sich eine befriedigende, für technische Zwecke voll-ommen genügende Übereinstimmung ergab.

Wir können diese Lösungen als **erzwungene Schwingungen** ezeichnen, wobei wir jedoch stets den Unterschied im Auge be-alten müssen, der zwischen der harmonischen Schwingung und er durch die Differentialgleichungen 1) und 1a) beschriebenen ewegung besteht: die Summe aus einer Lösung von 1) und einer olchen von 1a) gibt im allgemeinen nicht wieder eine Lösung on 1a) wie im Falle $\beta = 0$, $\gamma = 0$, weil nur in letzterem Falle ie Differentialgleichungen linear sind.

Jede Lösung von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = R(t),$$

o $R(t)$ eine beliebige periodische Funktion mit der Periode $= \frac{2\pi}{\omega}$ bedeutet, läßt sich zerlegen in einen Summanden mit ieser Periode und einen anderen Summanden mit der Periode $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$. Im Falle der Gleichung 1a) hört diese Eigenschaft schon eshalb auf zu existieren, weil die Lösungen von 1) Perioden esitzen, deren Betrag T jeden Wert zwischen $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ und ∞ an-ehmen kann.

Daß die gefundenen Lösungen die einzigen periodischen ösungen von 1a) seien, kann nach dem Gange der Untersuchung icht als sicher hingestellt werden, denn unsere Grundbedingung, aß alle Näherungswerte x_1, x_2 usw. die Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ besitzen, st hinreichend, aber nicht notwendig, wie unsere Anwendung der ukzessiven Näherungen auf die Gleichung

$$\ddot{x} = k \sin \omega t - \alpha x$$

eigt.

Mangels der allgemeinen Lösung von 1a) kann hier der Versuch einige Sicherheit geben, und hiernach scheint es, daß keine weiteren periodischen Lösungen von 1a) existieren.

Ein deutliches Bild von der Abhängigkeit dieser Lösungen bzw. ihres Hauptbestandteiles $A \sin \omega t$ von der Frequenz und

Digitized by Google

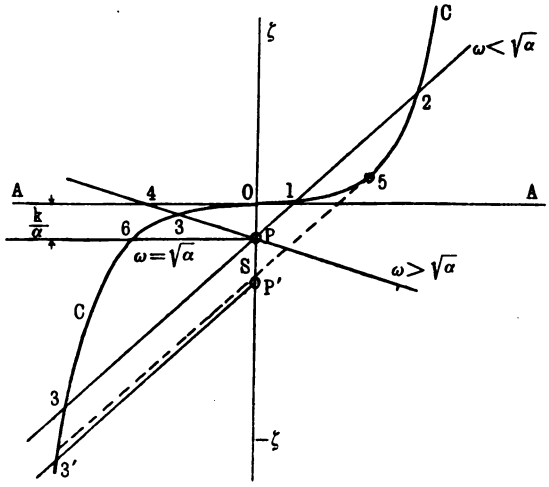
Intensität der Erregung erhalten wir durch die Schnittpunk unserer Kurve C mit der Geraden

$$\zeta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A - \frac{k}{\alpha}.$$

Die Kurve C hängt ab von den Koeffizienten α, β, γ u geht im Spezialfall $\beta = 0$, $\gamma = 0$ in die Abszissenachse OA üb (Fig. 11).

Für einen bestimmten Wert $\frac{k}{\alpha} = OP$ und einen Wert $\omega <$ erhält man drei Lösungen entsprechend den Punkten 1, 2,

Fig. 11.



Läßt man k bei konstantem ω stetig wachsen, so fallen schlie lich die Punkte 1 und 2 in 5 zusammen, und bei weiterem A wachsen von k, wobei P in die Lage P' gelangt, erhält man n eine Lösung entsprechend dem Schnittpunkte 3′. Für $\omega >$ ergibt sich stets nur eine Lösung entsprechend Schnittpunkt während O_4 den Ausschlag bei der harmonischen Schwingu ($\beta = 0$, $\gamma = 0$) darstellt.

Für $\omega = \sqrt{\alpha}$ rückt bei der harmonischen Schwingung Punkt ins Unendliche, d. h. es existiert in diesem Falle keine periodisch Lösung. Ist jedoch nur einer oder beide Koeffizienten α, β v Null verschieden, so existiert auch für $\omega = \sqrt{\alpha}$ eine periodisch

Digitized by Google

Lösung, die durch den Punkt 6 repräsentiert wird. In diesem Falle ist bei positivem k der Ausschlag A negativ, bei negativem k positiv, d. h. der Hauptteil $A \sin \omega t$ unserer Schwingung zeigt gegenüber unserem Antriebe $k \sin \omega t$ eine Phasenverschiebung von 180°.

Der Ausdruck „Resonanz" hat im Falle der allgemeineren Differentialgleichung 1a) jede Bedeutung verloren, denn der dem Punkt 6 entsprechende Ausschlag ist endlich und nimmt zu bei abnehmendem ω.

Wenn daher im folgenden der Kürze wegen noch der Ausdruck Resonanz gebraucht wird, so sei hierunter der Fall $\omega = \sqrt{\alpha}$ verstanden; zweckmäßigerweise bezeichnet man dann den Fall $\omega > \sqrt{\alpha}$ als Antrieb über Resonanz und $\omega < \sqrt{\alpha}$ als Antrieb unter Resonanz.

Es sei nun angenommen, das System befinde sich in einem Schwingungszustande entsprechend Punkt 1 unter einem Antriebe, der durch OP repräsentiert wird. Erteilt man OP einen kleinen Zuwachs, so erhält das System nicht die periodische Bewegung die dem Nachbarpunkte von 1 entspricht, es müssen Störungen eintreten, von denen man, mangels der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung, nicht einmal wissen kann, ob auch sie klein bleiben.

Falls geringe Dämpfung vorhanden ist, kann man aber, wenn OP genügend langsam wächst, die Bewegung periodisch erhalten und den Punkt 1 nach Verlauf längerer Zeit nach Punkt 5 bringen.

Was geschieht nun bei weiterem Anwachsen von OP, wenn ω beibehalten wird? Bei noch so geringer Überschreitung des Punktes S hört die Bewegung auf, periodisch zu bleiben, die Phase der Bewegung weicht von der des Antriebes mehr und mehr ab, und nach längerer Zeit, deren Dauer von der Dämpfung abhängt, kommt das System in den Schwingungszustand 3′ unter Störungen, deren Ausschläge den Ausschlag der zu 3′ gehörenden periodischen Bewegung um ein Bedeutendes übersteigen.

Die Beschreibung dieser merkwürdigen Erscheinung kann erst durch die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung gegeben werden. Sie kann nur im Falle der Unterresonanz ($\omega < \sqrt{\alpha}$) eintreten; bei Überresonanz kann die Größe des Antriebes OP, von Null an wachsend, in langsamer Folge ohne Störung gesteigert werden.

Digitized by Google

Ist daher der Antrieb wenn auch nur kleinen Änderungen unterworfen, und sollen bei unserem System Störungen vermieden werden, so ist man gezwungen, entweder $\omega > \alpha$ zu halten oder ω viel kleiner als $\sqrt{\alpha}$ zu wählen, damit man nicht Gefahr läuft, in die Nachbarschaft des Punktes 5 zu geraten.

Ist ω sehr verschieden von $\sqrt{\alpha}$, so befinden sich die Punkte 1 und 3 in dem in der Umgebung von O sehr schwach gekrümmten Teile der Kurve C, und die Bewegung stimmt nahezu mit der harmonischen Schwingung überein, was sich aus der Lage der Punkte 3 und 4 ergibt.

Gegenüberstellung der harmonischen und der pseudoharmonischen Schwingung.

20. Hier sei noch eine Gegenüberstellung der soeben geschilderten charakteristischen Eigenschaften unserer Bewegung im Vergleich zur harmonischen Schwingung gegeben. Es dürfte angebracht sein, unserer Bewegung der Kürze halber, wie schon im vorhergehenden geschehen, den Namen „Pseudoharmonische Schwingung“ beizulegen.

Harmonische Schwingung.	Pseudoharmonische Schwingung.
Differentialgleichung: $\ddot{x} + \alpha x = R(t)$.	Differentialgleichung: $\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = R(t)$.
1. Die Eigenschwingung mit $R(t) = 0$ hat die Periode $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ unabhängig vom Ausschlag.	1. Die Eigenschwingung mit $R(t) = 0$ hat eine Periode zwischen 0 und $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ abhängig vom Ausschlag.

Anmerkung zu 1. Falls auf der linken Seite der Differentialgleichung höhere Potenzen als x^3 auftreten, lassen sich die gezeigten Näherungsmethoden ebenfalls anwenden. So ändert sich z. B. im Falle

$$\ddot{x} + \alpha x - \gamma x^3 + \delta x^5 = k \sin \omega t$$

nur die Form der Kurve, welche mit der Geraden

$$\zeta = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A - \frac{k}{\alpha}$$

geschnitten wird (Fig. 4), S. 43.

Digitized by Google

2. Die Lösung der Differen-
algleichung bei beliebigem, ab-
ilungsweise stetigem $R(t)$ kann
xplizite angeschrieben werden.

Wenn die Funktion R die
igenschaft hat $R(t+\tau)=R(t)$,
ò τ eine bestimmte konstante
eit, so setzt sich die Lösung
us zwei Summanden zusammen,

2. Die Lösung der Differentialgleichung bei beliebigem stetigen $R(t)$ ist nicht bekannt, selbst wenn man die Einschränkung macht, daß $R(t)$ eine stetige Funktion von t sein soll.

Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt, daß für den Fall $R(t+\tau)=R(t)$ auch Lösungen mit der Periode τ existieren müssen. (Horn, Ge-

---

Bei der Differentialgleichung des symmetrischen Pendels

$$\ddot{\psi}+\frac{g}{L}\sin\psi=k\sin\omega t$$

gibt sich mit der ersten Annäherung

$$\psi_0=A\sin\varphi,\quad \text{wo } \varphi=\omega t,$$

$$\ddot{\psi}_1=k\sin\varphi-2\frac{g}{L}[J_1(A)\sin\varphi+J_3(A)\sin 3\varphi+J_5(A)\sin 5\varphi+\cdots],$$

$$\psi_1=-\frac{k}{\omega^2}\sin\varphi+2\frac{g}{L}\left[\frac{J_1(A)}{\omega^2}\sin\varphi+\frac{J_3(A)}{9\omega^2}\sin 3\varphi+\frac{J_5(A)}{25\omega^2}\sin 5\varphi+\cdots\right].$$

Die Bedingung

$$-\frac{k}{\omega^2}+2\frac{g}{L}\frac{J_1(A)}{\omega^2}=A$$

t identisch mit

$$A\left(1-\frac{\omega^2}{\alpha}\right)-\frac{k}{\alpha}=A-2J_1(A),\quad \text{wo } \alpha=\frac{g}{L}.$$

Man hat also die Gerade, die sich aus der linken Seite der Gleichung ergibt, it der Kurve

$$\zeta=A-2J_1(A)=\frac{A^3}{8}-\frac{A^5}{192}+\cdots$$

schneiden.

Anmerkung zu 2. Man könnte versucht sein, den Unterschied betr. unkt 3 keine praktische Bedeutung beizumessen, da in Wirklichkeit stets ine Dämpfung vorhanden ist, die auch im Falle $\omega=\sqrt{\alpha}$ bei der harmoischen Schwingung einen stationären Bewegungszustand (periodische Lösung) läßt. Für jede noch so kleine Dämpfung müßte sich jedoch bei der erwungenen harmonischen Schwingung die bekannte Phasenverschiebung von 0° ergeben, was bei der pseudoharmonischen Schwingung keineswegs zuifft. Der charakteristische Unterschied bezüglich des Punktes 3 ($\omega=\sqrt{\alpha}$) ei den beiden Vorgängen verschwindet daher auch bei Annahme einer ämpfung nicht. Auf diesen Punkt wird noch besonders im Abschnitt 26 ingewiesen.

Digitized by Google

deren einer die Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$ und deren andrer die Periode τ besitzt.

Dieser letztgenannte Teil führt den Namen „erzwungene Schwingung“ und hat im Falle $R(t) = k \sin \omega t$, wo k eine Konstante, folgende Eigenschaften: er ist von der Form $A \sin \omega t$, wo $A = -\frac{k}{\omega^2 - \alpha}$.

Bei festem ω ist A proportional k, für $\omega < \sqrt{\alpha}$ hat A dasselbe, für $\omega > \sqrt{\alpha}$ das entgegengesetzte Vorzeichen wie k.

Es gilt das Gesetz der Superposition der Lösungen, d. h. ist $R = k_1 \sin \omega_1 t + k_2 \sin \omega_2 t + \cdots + k_n \sin \omega_n t$, so hat die erzwungene Schwingung die Form $A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + \cdots + A_n \sin \omega_n t$.

3. Für $\omega = \sqrt{\alpha}$ und $k \neq 0$ existiert keine periodische Lösung.

wöhnliche Differentialgleichungen, Sammlung Schubert, § 68.) Mehr ist bei der allgemeinen Form von $R(t)$ hierüber nicht bekannt.

Im Falle $R(t) = k \sin \omega t$ kann die Lösung durch sukzessive Annäherung in eine oder drei Fouriersche Reihen entwickelt werden: $A_0 + A_1 \sin \omega t + \cdots$

Bei festem ω ist A_1 nicht proportional k, sondern A_1 und A_0 sind mit k in komplizierter Weise verknüpft. Für $\omega > \sqrt{\alpha}$ hat A_1 sicher das entgegengesetzte Vorzeichen wie k, für $\omega < \sqrt{\alpha}$ gibt es unter Umständen drei reelle A_1.

Das Gesetz der Superposition gilt nicht; es gilt annähernd bei kleinen $k_1, k_2 \ldots$, falls alle $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ wesentlich verschieden von $\sqrt{\alpha}$ sind.

3. Für $\omega = \sqrt{\alpha}$ und $k \neq 0$ existiert für jedes k eine periodische Lösung.

III. Versuche.

21. Der Zweck der Versuche war:

1. Die Ergebnisse der Rechnung nachzuprüfen durch Messung der Ausschläge eines schwingenden Systems, dessen Konstitution der Differentialgleichung 1) entspricht;

Digitized by Google

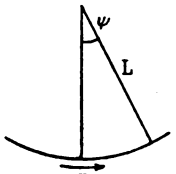
2. festzustellen, ob bei entsprechenden Werten von k und wirklich die drei sich aus der Rechnung ergebenden Bewegungszustände hergestellt werden können;

3. ob das oben beschriebene Verhalten des Systems bei Punkt 5 Fig. 11, S. 72) wirklich eintritt;

4. nachzusehen, ob noch andere als die oben beschriebenen periodischen Bewegungen hervorgerufen werden können.

Als einfachstes System, welches der Differentialgleichung 1) . 23 entspricht, darf wohl ein Kreispendel gelten, das unter dem influß der Schwere und einer konstanten Tangentialkraft um ine beliebige Gleichgewichtslage frei schwingt oder einer veränderchen eingeprägten Tangentialkraft $k \sin \omega t$ unterorfen wird.

Fig. 12.



Wie wir schon bei Aufstellung von Gleihung 70) gesehen haben, entspricht dieses System ei kleinen Schwingungen nicht genau unseren Bedingungen, sondern erst bei Vernachlässigung er Glieder mit x^4, x^5 usw.

Die genaue Bewegungsgleichung lautet:

$$L\ddot{\psi} + g \sin \psi = c + k \sin \omega t, \quad \text{wo } c = g \sin \psi_0 \qquad 73)$$

vgl. Gleichung 70)].

Die Integration dieser Differentialgleichung ist bis heute noch icht geleistet, selbst nicht der einfachere Fall:

$$L\ddot{\psi} + g \sin \psi = c.$$

Nur der Spezialfall:

$$L\ddot{\psi} + g \sin \psi = 0$$

st vollständig durchgeführt (vgl. Weierstraß, Gesamte Werke, 3d. 6, S. 247).

Die Lösung in der einfachsten Form, dargestellt durch ellipische Funktionen, lautet:

$$\sin \psi = \sqrt{\frac{2H}{L}} \frac{\sigma u \, \sigma_2 u}{\sigma_3^2 u},$$

wo

$$u = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t, \qquad H = \frac{v_0^2}{2g}$$

und v_0 die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt bedeutet (Fig. 12). (Anhang III.)

Digitized by Google

Will man die Gleichung 73) in einem bestimmten Falle durch sukzessive Näherung lösen, so gibt man ihr die Form:

$$\ddot{x} = -g \sin \frac{x}{L} + c + k \sin \omega t$$

und benutzt als erste Näherung den Wert 64), S. 59, nachdem A, B, C zahlenmäßig ermittelt sind. Die folgenden Näherungswerte sind dann durch die Beziehungen:

$$\ddot{x}_2 = -g \sin \frac{x_1}{L} + c + k \sin \omega t,$$

$$\ddot{x}_3 = -g \sin \frac{x_2}{L} + c + k \sin \omega t$$

usw. bestimmt.

Die Integrationen sind graphisch ohne Schwierigkeit durchführbar.

In einem bestimmten, von mir durchgeführten Falle stellten sich die Unterschiede als so geringfügig heraus, daß es gerechtfertigt ist, wenn wir, für den vorliegenden Zweck, das Kreispendel mit einem System, das unseren Bedingungen entspricht, als gleichwertig betrachten.

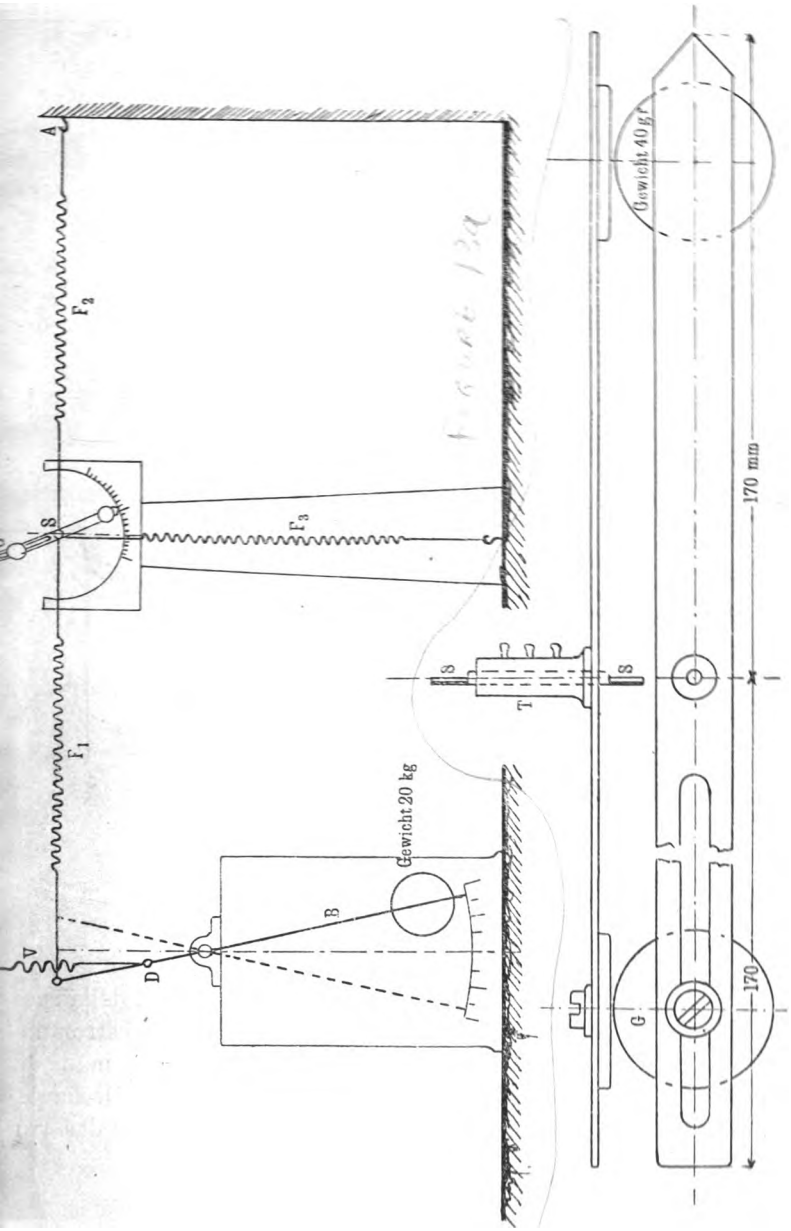
Versuchseinrichtung.

22. Ein kleines Pendel nach Fig. 13a, dessen ideelle Länge durch Verschiebung des oberen Gewichtes G verändert werden konnte, war auf den Schneiden S gelagert und erhielt seinen Antrieb durch Seidenfäden, die über die kleine Trommel T geschlungen waren.

Der eine Faden war mit einer Feder F_2 gekuppelt (Fig. 13b), die an dem festen Punkte A angehängt war. Der andere Seidenfaden war durch eine gleiche Feder F_1 mit dem sehr schweren Antriebspendel B, das auf Kugellagern ging, gekuppelt. Ein dritter Faden war durch eine vertikale Feder F_3 belastet, so daß eine beliebige Gleichgewichtslage des Pendels hergestellt werden konnte.

Das große Pendel wurde durch kleine Impulse, welche von Hand beim Durchgange durch die Mittellage auf den Zapfen D ausgeübt wurden, während eines Versuches auf konstantem Ausschlage erhalten.

Digitized by Google



Digitized by Google

Um die Schwingungsdauer des großen Pendels leicht ändern zu können, wurde es an einem Punkte D durch eine unter regelbarer konstanter Spannung stehende vertikale Schnur V belastet.

Die Ausschläge der beiden Pendel wurden an möglichst großen Skalen abgelesen.

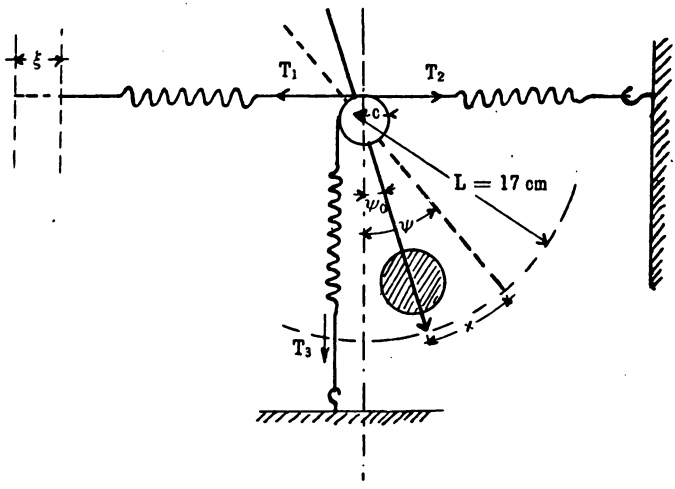
23. Die Bewegungsgleichungen des Versuchssystems

können leicht nach Fig. 14 angeschrieben werden.

In der Gleichgewichtslage des kleinen Pendels (unter dem Winkel ψ_0 gegen die Lotrechte) ist

$$0 = gS \sin \psi_0 + c\,(T_{20} - T_{10} - T_{30}).$$

Fig. 14.



Es bedeutet hier gS das statische Moment des Pendelkörpers (mit Trommel und Gewichten), c den Radius der Antriebstrommel, T_{10}, T_{20}, T_{30} sind die Fadenspannungen. Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Pendelmasse in bezug auf die Drehachse mit J, so ist im Bewegungszustande unter dem Winkel ψ das Verzögerungsmoment:

$$-J\frac{d^2\psi}{dt^2} = gS \sin \psi + c(T_2 - T_1 - T_3).$$

Digitized by Google

Sind f_1, f_2, f_3 die Federkonstanten, so hat man:

$$T_1 - T_{10} = f_1 [\xi - c(\psi - \psi_0)],$$
$$T_2 - T_{20} = f_2 c(\psi - \psi_0),$$
$$T_3 - T_{30} = -f_3 c(\psi - \psi_0).$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{gS}{J}(\sin\psi - \sin\psi_0) + \frac{c^2}{J}(f_1 + f_2 + f_3)(\psi - \psi_0) = \frac{cf_1}{J}\cdot\xi$$

s Bewegungsgleichung des Pendels, wenn noch das Gesetz be-icksichtigt wird, nach dem sich die Zwangsbewegung ξ vollzieht.

Bei der relativ großen Masse des Pendels B kann man die ückwirkung von S auf B vernachlässigen und ist zu der Auf-ssung berechtigt, daß sich ξ unabhängig von der Bewegung des leinen Versuchspendels mit der Zeit ändert.

Das Gesetz dieser Zwangsbewegung hat mit sehr großer An-äherung die Form $\xi = a\sin\omega t$, wo a eine Konstante bedeutet, die urch den jeweiligen maximalen Ausschlag des Pendels B gegeben ist.

Durch Einführung von

$$x = L(\psi - \psi_0)$$

nd

$$\frac{x}{L}\cos\psi_0 - \frac{x^2}{2L^2}\sin\psi_0 - \frac{x^3}{6L^3}\cos\psi_0$$

n Stelle von $\sin\psi - \sin\psi_0$ erhält man die Bewegungsgleichung n der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{gS}{J}\cos\psi_0 + \frac{c^2}{J}(f_1 + f_2 + f_3)\right]x$$
$$- \frac{1}{2L}\frac{gS}{J}\sin\psi_0 \cdot x^2 - \frac{1}{6L^2}\frac{gS}{J}\cos\psi_0 \cdot x^3 = \frac{cf_1L}{J}\,a\sin\omega t$$

der

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k\sin\omega t,$$

orin

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{gS}{J}\cos\psi_0 + \frac{c^2}{J}(f_1 + f_2 + f_3), \\ \beta &= \frac{1}{2L}\frac{gS}{J}\sin\psi_0, \\ \gamma &= \frac{1}{6L^2}\frac{gS}{J}\cos\psi_0, \\ k &= \frac{cf_1L}{J}a. \end{aligned}\right\} \quad 74)$$

Digitized by Google

Der Koeffizient α kann experimentell leicht bestimmt werden, indem man das System sehr kleine Eigenschwingungen ausführen läßt und die Schwingungsdauer beobachtet.

Löst man alle Fäden von der Trommel, so ist $\psi_0 = 0$ und aus dem ermittelten α ergibt sich der Wert $\frac{gS}{J}$. Stellt man die Fadenverbindungen wieder her und beobachtet kleine Eigenschwingungen ($k = 0$), so ergibt sich der Wert $\frac{c^2}{J}(f_1 + f_2 + f_3)$. Die Werte β, γ sind leicht auszurechnen.

Der Wert k ergibt sich aus dem statischen Ausschlag $x = s$, der dem Maximalwert von ξ entspricht. Man hat

$$\alpha s - \beta s^2 - \gamma s^3 = k.$$

Der Wert $x = s$ wird an der Skala des kleinen Pendels beobachtet und hiernach k berechnet. In den meisten Fällen genügt es, $k = \alpha s$ anzunehmen. Dann ist der Wert $\frac{k}{\alpha}$ von Formel 69) nichts anderes als der statische Ausschlag, der dem Maximalwerte von ξ entspricht.

Eine Messung von Federspannungen, Gewichten, Trägheitsmomenten war nicht notwendig. Es waren lediglich zu ermitteln: die Schwingungszahlen des Versuchspendels bei sehr kleinen Ausschlägen, und zwar sowohl innerhalb des Systems, als isoliert; die Schwingungszahlen des Antriebspendels bei den benutzten Ausschlägen; die statischen Ausschläge des Versuchspendels entsprechend dem jeweiligen maximalen ξ und die dynamischen Ausschläge im Schwingungszustande. Die Ausschläge des Versuchspendels sind in Millimetern angegeben und gemessen an einer Kreisskala von 170 mm Radius.

Aus der Reihe der Versuche seien nur zwei hervorgehoben.

I. Symmetrisches Pendel.

$\psi_0 = 0$, $f_3 = 0$ (Feder F_3 entfernt).

24. Die minutliche Schwingungszahl des kleinen Pendels im Verbande mit dem System bei festgehaltenem Pendel F wurde eingestellt auf

$$60\,\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi} = 33{,}15\ \text{min}^{-1};$$

Digitized by Google

die Dauer von 100 Schwingungen wurde wiederholt mit der Stoppuhr gemessen.

Die minutlichen Schwingungszahlen $60\,\frac{\omega}{2\pi}$ des Antriebspendels B wurden in derselben Weise beim Schwingen des ganzen Systems gemessen.

$60\,\frac{\omega}{2\pi}$	Statischer Ausschlag s	Dynamischer Ausschlag	$1-\frac{\omega^2}{\alpha}$	Punkt im Diagramm
33,31 min^{-1}	1,2 mm	45 mm	— 0,010	1
33,28 min^{-1}	2,4 mm	65 mm	— 0,008	2
33,11 min^{-1}	4,8 mm	92 mm	+ 0,002	3

Die Versuchsresultate wurden kontrolliert nach Formel 37). Der Wert $\frac{c^2}{J}(f_1+f_2+f_3)$ stellte sich als vernachlässigbar klein heraus, so daß

$$\frac{3}{4}\,\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{1}{8\,L^2},\quad \zeta=\frac{1}{8}\,\frac{A^3}{L^3}$$

gesetzt werden konnte.

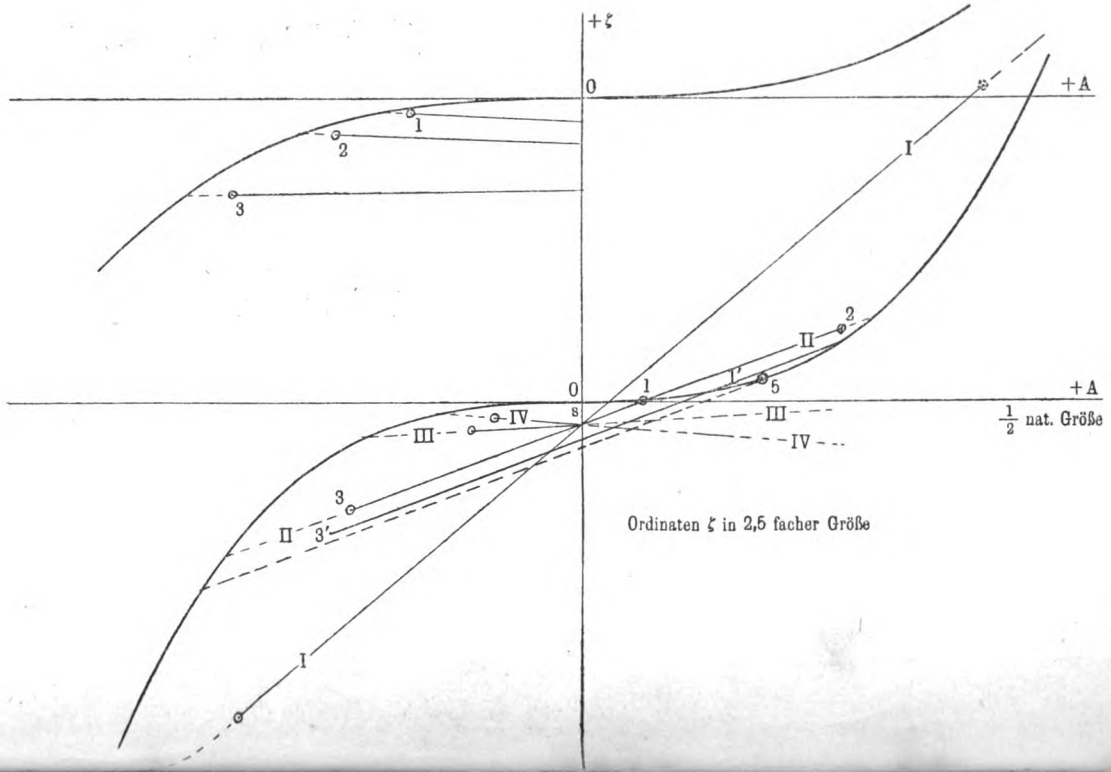
Auf Fig. 15a sind die Abszissen A in natürlicher Größe, die Ordinaten ζ der Deutlichkeit halber in fünffacher Größe aufgetragen. Wie zu erwarten war, fallen die Ausschläge kleiner aus als nach der Rechnung infolge der unvermeidlichen Bewegungswiderstände (Luftwiderstand, Reibung an den Schneiden). Mit Rücksicht hierauf kann die Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung bis auf etwa 10 Proz. des Rechnungsergebnisses als gut bezeichnet werden. Das zweite Glied der Gleichung 36) kommt für $A = 10$ cm gegenüber dem ersten nicht in Betracht, wie eine einfache Rechnung ergibt.

Übrigens sei noch bemerkt, daß dieser Fall einen Vergleich mit den genauen Eigenschwingungszahlen von 73), S. 77 gestattet, weil hier das konstante Glied von 73) $c = 0$ ist. Die Ergebnisse der genauen Rechnung lassen sich von den Ergebnissen der Gleichung 37) zeichnerisch kaum unterscheiden; so ergibt sich z. B. für $x = 10$ cm

$$\psi=\frac{10}{17}=0{,}58824,$$

Digitized by Google

Fig. 15a.



Ordinaten ζ in 2,5 facher Größe

Digitized by Google

was einem Winkel von 33° 42′ 12″ entspricht. Die genaue Schwingungszeit des Pendels ist hierfür:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 1{,}022\,05, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\,\frac{1}{1{,}022\,05},$$

$$\frac{\omega^2}{\alpha} = 0{,}957\,31, \qquad 1 - \frac{\omega^2}{\alpha} = 0{,}042\,69,$$

ein Resultat, das zeichnerisch genau mit unserer Fig. 15a übereinstimmt, wenn man den Punkt mit den Koordinaten A und $\xi = \left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right) A$ für $A = 10$ cm einträgt.

II. Unsymmetrisches Pendel.

$$\psi_0 = 37^\circ\,4', \qquad L\psi_0 = 110\,\text{mm}.$$

25. Der Winkel ψ_0 wurde so groß als möglich gemacht, um eine stark gekrümmte Kurve ξ im Koordinatensystem ξ, A zu erhalten. Einer Vergrößerung über das angegebene Maß hätten die Seidenfäden von F_3 nicht standgehalten, auch die Schneiden waren für eine größere Belastung nicht kräftig genug.

Vor dem Versuche wurde ermittelt:

$\frac{gS}{J} = 17{,}95\,\text{sek}^{-2}$ durch Messung der Schwingungszahl des Pendels außer Verband (kleine Schwingungen),

$\alpha = 14{,}67\,\text{sek}^{-2}$ durch Messung der minutlichen Schwingungszahl des Pendels im Verband bei

$$\psi_0 = 37^\circ\,4', \quad 60\,\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi} = 36{,}57\,\text{min}^{-1}.$$

Mit

$$\frac{gS}{J}\cos\psi_0 = 17{,}95 \cdot 0{,}7979 = 14{,}32\,\text{sek}^{-2}$$

ergibt sich nach 74):

$$\frac{c^2}{J}(f_1 + f_2 + f_3) = \alpha - \frac{gS}{J}\cos\psi_0 = 0{,}35\,\text{sek}^{-2}.$$

Weiter folgt:

$$\beta = \frac{1}{2}\,\frac{17{,}95}{17} \cdot 0{,}6027 = 0{,}3182\,\text{cm}^{-1}\,\text{sek}^{-2},$$

$$\gamma = \frac{1}{6}\,\frac{17{,}95}{17^2} \cdot 0{,}7979 = 0{,}0083\,\text{cm}^{-2}\,\text{sek}^{-2}.$$

Digitized by Google

Die Versuche wurden bei konstantem k gemacht, entsprechend einem statischen Ausschlage $s = 1{,}1$ mm. Es wurde gemessen:

$60\,\frac{\omega}{2\pi}$	$1 - \frac{\omega^2}{\alpha}$	Gerade	Dynamischer Ausschlag		
33,40 min^{-1}	0,166	I . . . I	$\overline{107}$ mm	7 mm	— 91 mm
35,21 min^{-1}	0,073	II . . . II	$\overline{69}$ „	16 „	— 61 „
36,36 min^{-1}	0,011	III . . . III	—	—	— 29 „
36,86 min^{-1}	— 0,016	IV . . . IV	—	—	— 23 „

Die Ausschläge, welche den überstrichenen Zahlen entsprechen, ließen sich nur sehr kurze Zeit halten, während alle anderen Ausschläge beliebig lange gehalten werden konnten. Die ersteren entsprechen daher Bewegungszuständen, die entweder instabil oder sehr empfindlich gegen kleine Störungen sind. Die eingetragenen Zahlen sind das arithmetische Mittel aus dem Absolutwert des positiven und negativen Ausschlages, so daß sie unter Vernachlässigung von $\frac{\gamma}{3\,\omega^2}\,A^3 \sin 3\,\omega t$, mit dem Koeffizienten A von 64), S. 59 übereinstimmen müßten.

Zur Kontrolle bestimmen wir A nach 71), S. 70, aus der Kurve:

$$\zeta = A^3 \left[\frac{3}{4}\,\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{1 - \frac{3}{2}\,\frac{\gamma}{\alpha}\,A^2} \right].$$

Die Resultate sind in Fig. 15 b aufgetragen.

Die Wiedergabe der Kontrollrechnung für einzelne Punkte nach genaueren Methoden, die ich auch nach dem für Gleichung 73), S. 77, angegebenen Verfahren durchgeführt habe, dürfte entbehrlich sein, da die Korrekturen, welche an dem Ergebnis nach Gleichung 71), S. 70, angebracht werden müßten, sich als ganz unwesentlich herausgestellt haben.

Wie aus der Zeichnung Fig. 15 b zu ersehen ist, stimmt der Versuch viel weniger gut mit der Rechnung überein als im symmetrischen Falle. Die Ursache dieses Verhaltens ist die Deformation der schwachen Schneidenachse infolge der Belastung durch die Feder F_3, wodurch die Bewegungswiderstände erheblich ver-

Digitized by Google

größert wurden gegenüber dem symmetrischen Falle. Daß diese Unstimmigkeit besonders auffallend bei negativem A ist, ist erklärlich, weil hierfür die Reaktionen an den Schneiden größer ausfallen als bei positivem A.

Die Bewegungszustände, welche den Punkten 1, 2 und 3 entsprechen, wurden wiederholt durch Anhalten des kleinen Pendels und Freigabe im entsprechenden Moment hergestellt. Die Zustände 1 und 3 ließen sich auf die Dauer halten, der Zustand 2 jedoch nicht.

Ferner wurde die vom großen Pendel ausgeübte Zwangsbewegung allmählich gesteigert, bis zu einem Betrage, der einem statischen Ausschlage $s' = 2s$ entspricht. Hierdurch sollte der stabile Zustand 1 in den Zustand 1′ übergeführt werden. Dies erwies sich als unmöglich, denn noch kurz, ehe 1′ erreicht wurde, hörte die Bewegung von der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ auf, und es stellte sich nach Ablauf einer längeren verwickelten Übergangsbewegung der stabile Zustand 3′ ein. Dieses Verhalten ist erklärlich durch die stärkere Krümmung der wirklichen Kurve gegenüber der berechneten. Bei einem sehr exakt hergestellten Pendel mit möglichst geringen Bewegungswiderständen wird man noch näher an den Punkt 5 herankommen können.

Mit Rücksicht auf den etwas primitiven Zustand des Versuchsapparates, der in Anbetracht der Zeitverhältnisse nicht besser in kurzer Frist beschafft werden konnte, darf man zufrieden sein mit der Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch. Die Ungenauigkeit liegt auf Seiten des Versuches, hierin ist vor allen Dingen eine Verbesserung und Verfeinerung in Zukunft anzustreben.

Das vermutete Verhalten des Systems beim Punkte 5, über das die Rechnung bis heute keinen Aufschluß gibt, wurde durch den Versuch — und das war sein Hauptzweck — einwandfrei bestätigt. Für jede Größe der Erregung k existiert ein solcher „kritischer Punkt“.

Die Existenz weiterer periodischer Bewegungen konnte nicht festgestellt werden.

Digitized by Google

IV. Einfluſs der Dämpfung.

26. Die Versuche haben ergeben, daß selbst eine geringe Dämpfung von sichtbarem Einfluß auf die Größe des Ausschlages ist, während in qualitativer Richtung sich eine schwache Dämpfung anscheinend nicht bemerkbar macht. Es handelt sich nun darum, diese Verhältnisse der Rechnung zugänglich zu machen.

Daß in diesem Falle jedenfalls die rechnerische Arbeit bedeutend anwächst, ließ sich von vornherein erwarten. Es sei deshalb hier nur der Fall der erzwungenen symmetrischen pseudoharmonischen Schwingung behandelt, deren Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \chi \frac{dx}{dt} + \alpha x - \gamma x^3 = k \sin \omega t \qquad 1)$$

ist.

Wir betrachten auch hier wieder vorübergehend die Gleichung der gedämpften harmonischen Schwingung

$$\ddot{x} + \chi \dot{x} + \alpha x = k \sin \omega t \qquad 2)$$

und suchen sie, in genau derselben Weise wie bei der ungedämpften Schwingung, durch sukzessive Näherung zu lösen. Wir wählen als erste Näherung:

$$x_0 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\chi \dot{x}_0 - \alpha x_0 + k \sin \omega t \\ &= [k - \alpha A + \chi \omega B] \sin \omega t - [\alpha B + \chi \omega A] \cos \omega t \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{1}{\omega^2} [k - \alpha A + \chi \omega B] \sin \omega t$$

$$+ \frac{1}{\omega^2} [\alpha B + \chi \omega A] \cos \omega t + Ct + C_1 \quad \text{mit } C = 0,\ C_1 = 0.$$

Wir versuchen $x_1 = x_0$ zu machen durch die Annahme

$$\begin{aligned} k - \alpha A + \chi \omega B &= -\omega^2 A, \\ \alpha B + \chi \omega A &= \omega^2 B \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (\alpha - \omega^2) A - \chi \omega B &= k, \\ \chi \omega A + (\alpha - \omega^2) B &= 0, \end{aligned}$$

woraus die Koeffizienten A und B bestimmt werden können. Mit diesen Werten A und B wird auch $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$ usw.

Digitized by Google

h. der Annäherungsprozeß ist beendet, und die ursprüngliche nnahme

$$x_0 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

ellt eine genaue Partikularlösung der Gleichung 2) dar.

Ganz analog verfahren wir bei Behandlung der Gleichung 1). us der Annahme

$$x_0 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

lgt mit

$$\ddot{x}_1 = k \sin \omega t - \chi \dot{x}_0 - \alpha x_0 + \gamma x_0^3$$

ter Benutzung der Relationen:

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3 \omega t,$$

$$\sin^2 \omega t \cos \omega t = \frac{1}{4} \cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 3 \omega t,$$

$$\sin \omega t \cos^2 \omega t = \frac{1}{4} \sin \omega t + \frac{1}{4} \sin 3 \omega t,$$

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3 \omega t,$$

$$= -\frac{1}{\omega^2}\left[k - \alpha A + \chi \omega B + \frac{3}{4}\gamma A^3 + \frac{3}{4}\gamma A B^2\right] \sin \omega t$$

$$-\frac{1}{\omega^2}\left[-\alpha B - \chi \omega A + \frac{3}{4}\gamma A^2 B + \frac{3}{4}\gamma B^3\right] \cos \omega t$$

$$-\frac{1}{9\omega^2}\left[-\frac{1}{4}\gamma A^3 + \frac{3}{4}\gamma A B^2\right] \sin 3 \omega t$$

$$-\frac{1}{9\omega^2}\left[-\frac{3}{4}\gamma A^2 B + \frac{1}{4}\gamma B^3\right] \cos 3 \omega t.$$

Über die Konstanten A und B verfügen wir so, daß

$$= A \sin \omega t + B \cos \omega t - \frac{1}{9\omega^2}\left[-\frac{1}{4}\gamma A^3 + \frac{3}{4}\gamma A B^2\right] \sin 3 \omega t$$

$$-\frac{1}{9\omega^2}\left[-\frac{3}{4}\gamma A^2 B + \frac{1}{4}\gamma B^3\right] \cos 3 \omega t$$

rd. Hiernach können prinzipiell ohne Schwierigkeit, praktisch doch nur durch etwas mühevolle Rechenarbeit alle folgenden äherungswerte x_2, x_3 ... aufgestellt werden.

Von der Aufstellung der Konvergenzbedingungen sei auch er vorläufig abgesehen.

Digitized by Google

Wir begnügen uns mit dem Anfangswert

$$x_0 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

wo A und B den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} -k + (\alpha - \omega^2) A - \chi \omega B - \frac{3}{4} \gamma A (A^2 + B^2) = 0 \\ (\alpha - \omega^2) B + \chi \omega A - \frac{3}{4} \gamma B (A^2 + B^2) = 0 \end{aligned}\right\}$$

zu genügen haben. Für manche Zwecke ist es angebracht, zu setzen:

$$x_0 = C \sin (\omega t - \varepsilon), \quad \text{wo } \operatorname{tg} \varepsilon = + \frac{-B}{A}, \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Wir schreiben die beiden Gleichungen 4) in der Form

$$f(A, B) = 0,$$
$$F(A, B) = 0.$$

Ihre gemeinsamen Wurzeln lassen sich leicht übersehen.

Wir bilden:

$$Bf - AF \equiv -kB - \chi \omega (A^2 + B^2) = 0. \qquad 5)$$

Es müssen daher alle Werte A, B, die gleichzeitig 4) erfüllen, auch der Gleichung 5) genügen. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem A, B stellt diese Gleichung aber einen Kreis dar, der durch den Anfangspunkt geht und dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$A = 0, \quad B = -\frac{k}{2 \chi \omega}$$

hat; d. h. auf diesem Kreise liegen alle Punkte, welche die Wertepaare A, B repräsentieren, die gleichzeitig den Gleichungen 4) genügen.

Aus der ersten Gleichung von 4) und Gleichung 5) bilden wir

$$\left.\begin{aligned} f - \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\chi \omega} A [Bf - AF] = \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\chi \omega} AB\right) f + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\chi \omega} A^2 F \\ \equiv -k + (\alpha - \omega^2) A - \chi \omega B + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{\chi \omega} k A B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

Gleichung 6) stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, auf der ebenfalls die sämtlichen Wurzeln von 4) liegen müssen.

Digitized by Google

Wir bilden ferner aus der zweiten Gleichung von 4) und eichung 5):

$$\left.\begin{aligned} -\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}B[Bf-AF] &= -\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}B^2 f+\left(1+\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}AB\right)F \\ &\equiv (\alpha-\omega^2)B+\chi\omega A+\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}kB^2=0 \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Gleichung 7) stellt eine Parabel dar, auf der ausnahmslos ch die Wurzeln von 4) liegen.

Die Schnittpunkte von Hyperbel 6) und Parabel 7) sind aber urzeln der Gleichungen 4), denn aus

$$\left(1-\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}AB\right)f+\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}A^2F=0$$

$$-\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}B^2f+\left(1+\frac{3}{4}\frac{\gamma}{\chi\omega}AB\right)F=0$$

igt unbedingt $f=0$, $F=0$, weil die Determinante der Koeffi- enten $=1$ ist. Die Schnittpunkte der Hyperbel 6) mit Parabel 7) gen daher auf Kreis 5).

Um die Wurzeln von 4) zu finden, brauchen wir daher nur e Schnittpunkte der Parabel

$$A=-\frac{\alpha-\omega^2}{\chi\omega}B-\frac{3}{4}\frac{\gamma k}{\chi^2\omega^2}B^2 \qquad 7\,a)$$

it dem Kreise

$$A^2+B^2+\frac{k}{\chi\omega}B=0 \qquad 5\,a)$$

ufzusuchen. Da beide Kurven den Anfangspunkt enthalten, so önnen sich höchstens noch drei Schnittpunkte ergeben. Jetzt önnen die Werte von A nicht mehr unbegrenzt wachsen, wie Falle $\chi=0$, sondern sie sind begrenzt durch den Durch- esser des Kreises vom Betrage $\frac{k}{\chi\omega}$.

Im Falle $\gamma=0$ geht die Parabel 7a) in die Gerade

$$A=-\frac{\alpha-\omega^2}{\chi\omega}B$$

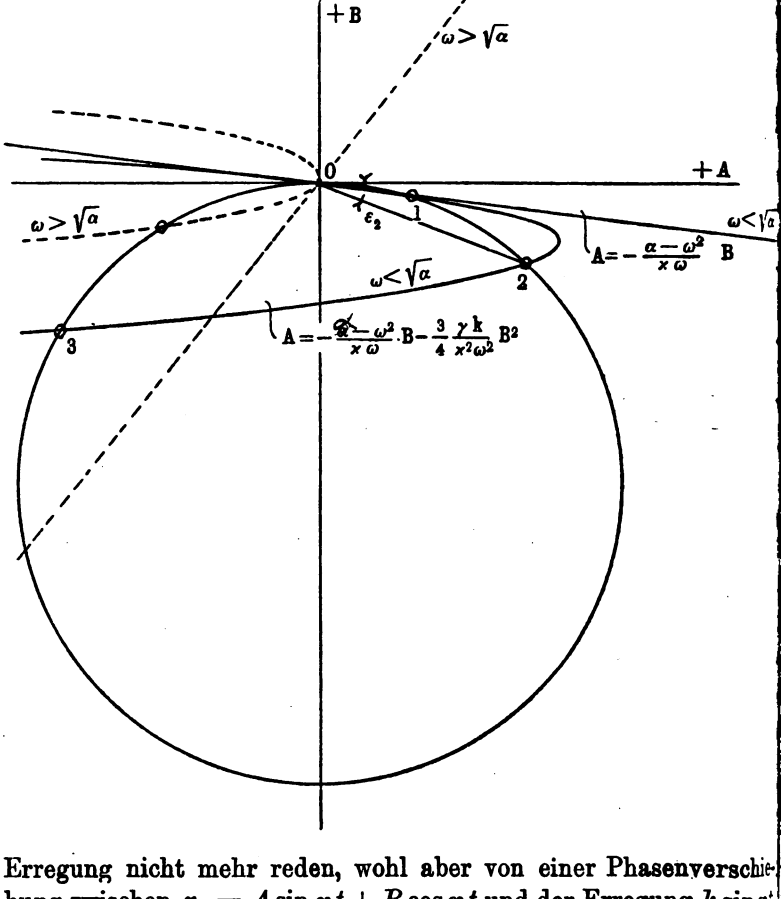
ber, und die sich hieraus ergebenden Werte von A und B decken ch mit bekannten Resultaten. Insbesondere folgt für $\omega=\sqrt{\alpha}$ Resonanz) $A=0$ und ein negativer Wert für B, wie ein Blick f den Kreis der Fig. 16 ergibt, d. h. die Entfernung aus der

Digitized by Google

Mittellage $x_0 = B\cos\omega t = x$ eilt der Erregung $k\sin\omega t$ um 90° in der Phase nach, ganz unabhängig von der Größe des Dämpfungsfaktors ~~α~~ χ.

Bei endlichem Wert von γ kann man von einer Phasenverschiebung zwischen der Entfernung aus der Mittellage und der

Fig. 16.



Erregung nicht mehr reden, wohl aber von einer Phasenverschiebung zwischen $x_0 = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ und der Erregung $k\sin\omega t$. Bei kleinem γ, wo die Bewegung in der Hauptsache durch χ bestimmt wird, hat dies eine gewisse Berechtigung, und es ist von Interesse, den Fall der Resonanz an Fig. 16 näher zu betrachten. Die Hauptachse der Parabel fällt dann mit dem negativen Teil

Digitized by Google

r A-Achse zusammen, und es ergibt sich nur ein Schnittpunkt r Parabel mit dem Kreis. Die in Rede stehende Phasen-rschiebung, die den Koordinaten A und B des Schnittpunktes tspricht, hängt aber auch bei kleinem γ ganz von dem Größen-rhältnis der Koeffizienten χ und γ ab; sie wird um so kleiner, kleiner der Wert von χ ist.

Aus dem Vergleich von Fig. 16 mit Fig. 4, S. 43 geht die Tat-che hervor, daß an dem gegensätzlichen Verhalten des An-ebes „unter und über Resonanz" durch schwache Dämpfung i der pseudoharmonischen Schwingung qualitativ nichts ändert wird.

Rücken die Punkte 1 und 2 zusammen, so erhält man den, m Punkt 5 der Fig. 11 entsprechenden Instabilitätspunkt. Bei arker Dämpfung können auch die Punkte 2 und 3 zusammen-llen oder es bleibt nur Schnittpunkt 1 übrig.

Der Annäherungswert

$$\left.\begin{aligned} x_1 = A\sin\omega t + B\cos\omega t + \gamma\frac{A^2-3B^2}{36\,\omega^2}A\sin 3\,\omega t \\ + \gamma\frac{3A^2-B^2}{36\,\omega^2}B\cos 3\,\omega t \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

terscheidet sich von x_0 nur durch die beiden Harmonischen itter Ordnung, die aber bei mäßigen Werten von γ nur unter-ordnete Größe besitzen. Sie sind daher nicht imstande, die oeffizienten A_2, B_2 der nächsten Annäherung

$$x_2 = A_2\sin\omega t + B_2\cos\omega t + \cdots$$

esentlich gegenüber A und B zu verändern. Bei großem Wert n γ wird man sich jedoch der Mühe von einigen Stunden Rechen-beit unterziehen müssen, x_2 vollständig und von x_3 die Anfangs-ieder zu bestimmen, um vor zu großen Abweichungen sicher zu sein. ir technische Zwecke genügt es in den meisten Fällen, x_0 zu kennen.

Für sehr kleine Werte von χ wird der Durchmesser des reises von Fig. 16 sehr groß, was den Übelstand zur Folge hat, ß die Schnittpunkte 1, 2, 3 nicht mehr zeichnerisch bestimmt rden können. In diesem Falle eliminieren wir B aus den leichungen 5a) und 7a) auf folgende Weise.

Aus 5a) entnehmen wir

$$B^2 = -\left[A^2 + \frac{k}{\chi\omega}\right]B$$

Digitized by Google

und führen diesen Wert in 7a) ein. Wir erhalten:

$$A = -\frac{\alpha-\omega^2}{\chi\omega}B + \frac{3}{4}\gamma\frac{k}{\chi^2\omega^2}\left[A^2 + \frac{k}{\chi\omega}B\right]$$
$$= \left[-\frac{\alpha-\omega^2}{\chi\omega} + \frac{3}{4}\gamma\frac{k^2}{\chi^3\omega^3}\right]B + \frac{3}{4}\gamma\frac{k}{\chi^2\omega^2}A^2.$$

Hieraus ergibt sich:

$$B = \frac{A - \frac{3}{4}\gamma\frac{k}{\chi^2\omega^2}A^2}{-\frac{\alpha-\omega^2}{\chi\omega} + \frac{3}{4}\gamma\frac{k^2}{\chi^3\omega^3}}.$$

Danach ist B eindeutig durch A bestimmt. Durch Ei führung von 9) in 5a) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}&[-(\alpha-\omega^2)A + k]\left[-(\alpha-\omega^2) + \frac{3}{4}\gamma\frac{k^2}{\chi^2\omega^2}\right]\\ &+ A\chi^2\omega^2 - \frac{3}{2}\gamma k A^2 + \frac{9}{16}\gamma^2\frac{k^2}{\chi^2\omega^2}A^3 = 0\end{aligned}\right\}$$

Diese Gleichung kann in jedem Falle zur Bestimmung v A benutzt werden, worauf dann Gleichung 9) den zugehörig Wert von B liefert.

Ist aber χ und der absolute Wert $|\alpha-\omega^2|$ sehr klein, kann man 10) ersetzen durch

$$[-(\alpha-\omega^2)+k]\frac{3}{4}\gamma\frac{k^2}{\chi^2\omega^2} - \frac{3}{2}\gamma k A^2 + \frac{9}{16}\gamma^2\frac{k^2}{\chi^2\omega^2}A^3 = 0,$$

und hieraus erhält man leicht:

$$\left(1-\frac{\omega^2}{\alpha}\right)A - \frac{k}{\alpha} = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3 - 2\frac{\chi^2\omega^2}{\alpha}\frac{A^2}{k}.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Relation 37), S. so sieht man, daß sie sich hiervon nur durch das Korrekturgl $-2\frac{\chi^2\omega^2}{\alpha}\frac{A^2}{k}$ unterscheidet. Dieses hängt aber außer von d Koeffizienten α und χ noch von der Frequenz und Intensität d Antriebes ab. Man kann daher die Kurve

$$\xi = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}A^3$$

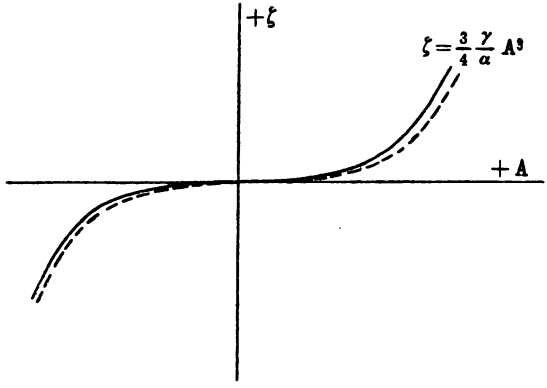
der Fig. 4, S. 43 nicht mit einer festen, für alle möglichen und k gültigen Korrektur versehen. Für ein bestimmtes festes

Digitized by Google

d ω hat die Korrektur den Verlauf nach der punktierten nie der Fig. 17.

Die experimentelle Bestätigung der in Fig. 17 dargestellten gebnisse der Rechnung wäre außerordentlich wünschenswert. e kann vermittelst größerer Pendelapparate, die eine Aufzeichng von Schwingungsdiagrammen ermöglichen, erfolgen, oder rch Messungen an elektromagnetischen Schwingungskreisen. i der letzteren Methode wäre besonders darauf zu achten, daß e Erregung möglichst genau der Form $k \sin \omega t$ entspricht, damit e Versuchsresultate ohne weiteres mit unseren Rechnungsergeb-

Fig. 17.



ssen verglichen werden können. Die Zeitverhältnisse haben mir ider nicht erlaubt, den einen oder den anderen Weg weiter zu rfolgen.

V. Stabilität der Bewegung.

27. Wie schon betont, kann die Frage nach der Stabilität r Bewegung endgültig erst nach Erhalt der allgemeinen Lösung r Differentialgleichung 1 a) von Abschnitt II (S. 23) beantwortet erden.

Die Frage ist aber von solcher Wichtigkeit, daß man, bei r geringen Aussicht, die allgemeine Lösung von 1 a) in nächster it zu erhalten, wohl berechtigt ist, die Methode der kleinen chwingungen probeweise auf den vorliegenden Fall anzuenden.

Digitized by Google

(Über den Wert der Methode vgl. Klein und Somme feld, Theorie des Kreisels, Heft II, S. 371.)

Wir beschränken die Betrachtung auf die Differentialgleichu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \gamma x^3 = k \sin \omega t$$

und nehmen an, die Lösung $x = f(t)$ befriedige die Gleichu identisch. Ein benachbarter Bewegungszustand sei dargeste durch die Lösung

$$x + \varepsilon = f(t) + f_1(t),$$

wo $\varepsilon = f_1(t)$ eine Funktion der Zeit t bedeuten soll, deren abs luter Betrag im betrachteten Zeitintervall so klein sein soll, d ε^2, ε^3 gegen ε vernachlässigt werden können. Unter dieser B dingung suchen wir ε so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$\frac{d^2(x+\varepsilon)}{dt^2} + \alpha(x+\varepsilon) - \gamma(x+\varepsilon)^3 = k \sin \omega t$$

befriedigt wird.

Es folgt dann mit Rücksicht auf 1):

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + (\alpha - 3\gamma x^2)\varepsilon = 0$$

als Bedingung für die Funktion $f_1(t)$.

Die zu Gleichung 2) gehörigen Anfangsbedingungen ergeb sich aus der kleinen Änderung der Anfangsbedingungen v Gleichung 1).

Es sei nun das Resultat des Näherungsprozesses von A schnitt II, 12

$$x = f(t) = a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3\omega t + \cdots,$$

und es werde ein (angenähertes) Kreispendel mit den Werten

$$\alpha = \frac{g}{L}, \quad \gamma = \frac{1}{6}\frac{g}{L^3}, \quad A = \frac{L}{2}$$

vorausgesetzt.

Danach lassen sich die Größenverhältnisse von a_1, a_3 ... messen, da ω^2 annähernd gleich α ist. Man ersieht, daß diesem Falle mit sehr guter Annäherung gesetzt werden kann:

$$x^2 = \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_1^2}{2}\cos 2\omega t,$$

$$a_1 = A = \frac{1}{2}L.$$

Digitized by Google

Der Wert von ω sei so gewählt, daß wir den Bewegungsstand erhalten, der durch Punkt 5 unserer Fig. 11, S. 72 präsentiert wird [1]).

Aus

$$\zeta = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha} A^3$$

lgt

$$\frac{d\zeta}{dA} = 3\frac{\zeta}{A}.$$

In Punkt 5 sind die Differentialquotienten der beiden Seiten n Gleichung 37), S. 40 einander gleich, daher ist

$$1 - \frac{\omega^2}{\alpha} = 3\frac{\zeta}{A} = \frac{3}{8}\frac{A^2}{L^2} = \frac{3}{32}$$

ler

$$\frac{\omega^2}{\alpha} = 0{,}906\,25, \quad \frac{\alpha}{\omega^2} = 1{,}103\,45, \quad \frac{\omega}{\sqrt{\alpha}} = 0{,}951\,91.$$

Setzt man $\omega t = t_1$, so geht die Gleichung 2) über in

$$\frac{d^2 z}{dt_1^2} + (q^2 - q' \cos 2t_1) \cdot z = 0, \qquad 3)$$

o

$$q^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\alpha - \frac{3}{2}\gamma A^2\right), \quad q' = -\frac{3}{2}\gamma\frac{A^2}{\omega^2}.$$

Nach obigem ist

$$\frac{3}{2}\gamma\frac{A^2}{\omega^2} = \frac{3}{2}\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\omega^2}\cdot A^2 = \frac{1}{4}\frac{A^2}{L^2}\frac{\alpha}{\omega^2} = 0{,}068\,97.$$

Schließlich kann Gleichung 3) auch geschrieben werden:

$$\frac{d^2 z}{dt_1^2} + \lambda^2 z = 0, \qquad 4)$$

o

$$\lambda^2 = 1{,}034\,48 + 0{,}068\,97 \cos 2t_1 \qquad 4\,a)$$

Die Differentialgleichung 3) ist aus astronomischen Unterchungen bekannt. Ihre Integration ist bei Horn, Gewöhnliche ifferentialgleichungen (Sammlung Schubert), Göschen 1905, be-

[1]) Diese Annahme verträgt sich mit der Voraussetzung $A = \frac{1}{2}L$, wenn e Stärke k der Erregung geeignet gewählt wird.

Digitized by Google

handelt. Als Resultat dieser Untersuchung ist dort, S. 243, angegeben das System der Fundamentallösungen

$$z_1 = e^{iht_1}\varphi(t_1), \qquad z_2 = e^{-iht_1}\varphi(-t_1),$$

worin φ eine periodische Funktion von t_1 mit der Periode π darstellt. Bedeutet $f_1(t_1)$ diejenige Partikularlösung von 3), für die $f_1(0) = 1$, $f_1'(0) = 0$ ist, so ist h reell oder imaginär, je nachdem

$$|f_1(\pi)| < 1 \quad \text{oder} \quad |f_1(\pi)| > 1$$

ausfällt.

Die bei Horn, S. 244 gegebene Formel 37) für $f_1(\pi)$ wird in unserem Falle unbrauchbar, da der Wert von q der Einheit sehr nahe kommt. Die Partikularlösung $f_1(t_1)$ muß daher auf einem anderen Wege bestimmt werden.

Wir teilen das Intervall $0 - \pi$ in acht gleiche Teile von der Größe τ, und betrachten den Koeffizienten λ der Gleichung 4) in jedem Teilintervall als konstant und gleich dem Werte $\lambda_{m\,n}$, der sich nach 4a) für die Mitte des Intervalls $m - n$ ergibt, d. h. wir ersetzen die Bewegung in jedem Teilintervall durch eine harmonische. Es ergibt sich für die Intervalle:

0—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8
$\lambda = 1{,}0480$	1,0300	1,0040	0,9853	0,9853	1,0040	1,0300	1,0480 sek^{-1}

Aus dem Anfangswerte

$$z(0) = 1 = z_0, \quad v(0) = \left(\frac{dz}{dt_1}\right) = v_0$$

ergibt sich dann:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z_0 \cos\lambda_{01}\tau + \frac{v_0}{\lambda_{01}} \sin\lambda_{01}\tau, \\ \frac{v_1}{\lambda_{01}} &= -z_0 \sin\lambda_{01}\tau + \frac{v_0}{\lambda_{01}} \cos\lambda_{01}\tau. \end{aligned}\right\}$$

Mit diesen Werten erhält man weiter:

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= z_1 \cos\lambda_{12}\tau + \frac{v_1}{\lambda_{12}} \sin\lambda_{12}\tau, \\ \frac{v_2}{\lambda_{12}} &= -z_1 \sin\lambda_{12}\tau + \frac{v_1}{\lambda_{12}} \cos\lambda_{12}\tau, \end{aligned}\right\}$$

usw.

Digitized by Google

Setzt man die Resultate 5) in 6) ein, so erhält man Formeln, ie für die Zahlenrechnung besser geeignet sind:

$$z_2 = z_0 \left[\cos(\lambda_{01}+\lambda_{12})\tau + \frac{\lambda_{12}-\lambda_{01}}{\lambda_{12}} \sin\lambda_{01}\tau \sin\lambda_{12}\tau\right]$$
$$+ \frac{v_0}{\lambda_{01}}\left[\sin(\lambda_{01}+\lambda_{12})\tau - \frac{\lambda_{12}-\lambda_{01}}{\lambda_{12}} \cos\lambda_{01}\tau \sin\lambda_{12}\tau\right],$$
$$\frac{v_2}{\lambda_{12}} = z_0 \left[-\sin(\lambda_{01}+\lambda_{12})\tau + \frac{\lambda_{12}-\lambda_{01}}{\lambda_{12}} \sin\lambda_{01}\tau \cos\lambda_{12}\tau\right]$$
$$+ \frac{v_0}{\lambda_{01}}\left[\cos(\lambda_{01}+\lambda_{12})\tau - \frac{\lambda_{12}-\lambda_{01}}{\lambda_{12}} \cos\lambda_{01}\tau \cos\lambda_{12}\tau\right].$$

Nach der letzten Formel wurde die Berechnung durchgeführt. ie Zwischenresultate ergaben sich, wie folgt:

$$x_0 = 1 \qquad v_0 = 0,$$
$$x_2 = 0{,}682\,38 \qquad \frac{v_2}{\lambda_{12}} = -0{,}734\,86,$$
$$x_4 = -0{,}057\,89 \qquad \frac{v_4}{\lambda_{34}} = -1{,}032\,68,$$
$$x_6 = -0{,}775\,62 \qquad \frac{v_6}{\lambda_{56}} = -0{,}676\,44,$$
$$x_8 = -1{,}024\,56 = f_1(\pi),$$

ist somit imaginär. Eine der beiden Fundamentallösungen gibt also eine Schwingung mit wachsender Amplitude. Nach iesem Resultate erscheint der Bewegungszustand bedingungsweise abil, genauer ausgedrückt: eine kleine Störung z wird sich bei eeigneten Anfangsbedingungen rasch vergrößern, und zwar lange, bis unsere Voraussetzung, daß z^2, z^3 vernachlässigbar ien, nicht mehr zutrifft.

Weitere Schlüsse zu ziehen, erlaubt die vorhergehende Rechnung nicht, in Übereinstimmung mit den Ausführungen von lein und Sommerfeld.

VI. Technische Bedeutung der pseudoharmonischen Schwingung.

28. Man könnte den Einwurf erheben, die vorhergehenden eduktionen hätten mehr Interesse für die Vertreter der theoreschen Mechanik und Physik, als Nutzen für die Technik. Für

Digitized by Google

diejenigen, die noch an die Möglichkeit einer Isolierung der Technik von den genannten Disziplinen glauben sollten, sei folgendes gesagt.

Wenn man sich von der Resonanz weit genug entfernt befindet, was der Techniker meist anstrebt, so kann man mit den Formeln der einfachen harmonischen Schwingung auskommen.

Wenn man jedoch einer Gefahr aus dem Wege gehen will, so ist es schon gut, wenn man weiß, nach welcher Seite man auszuweichen hat. Wir haben erkannt, daß das System sich gegenüber einem Antriebe unter Resonanz und gegenüber einem über Resonanz verschieden verhält. Schon der Gewinn dieser einen Erkenntnis gibt der Betrachtung spezifisch technischen Wert.

Es treten in der Technik Schwingungssysteme auf, wo die Koeffizienten β, γ gegenüber dem Koeffizienten α verschwinden. Diesem Falle werden Torsionswellen mit zentrischen Massen sehr nahe kommen und auf elektrotechnischem Gebiete Schwingungskreise ohne Eisen. Enthält der Schwingungskreis Eisen, so zeigt er nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ ganz verschiedene Erscheinungen, wie durch die Untersuchungen von Martienssen und Biermanns nachgewiesen ist.

Biermanns drückt den Zusammenhang zwischen dem Magnetisierungsstrom i und dem zugehörigen Kraftfluß ψ des eisenhaltigen Schwingungskreises durch die Formel

$$i = \frac{1}{L}\psi + \frac{1}{\lambda}\psi^3$$

aus und gelangt so zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{1}{KL}\psi - \frac{1}{K\lambda}\psi^3,$$

worin K, L, λ Konstanten bedeuten.

Die Differentialgleichung hat dieselbe Form wie unsere Gleichung 3) und wird von Biermanns durch Jacobische elliptische Funktionen integriert. Am Schluß der Arbeit wird von Biermanns erwähnt, daß auch der allgemeinere Fall

$$i = \frac{1}{L}\psi + \frac{1}{\lambda_1}\psi^3 + \frac{1}{\lambda_2}\psi^5$$

einer Behandlung durch elliptische Funktionen zugänglich ist, daß jedoch der angegebene Weg auf ganz außerordentlich um-

Digitized by Google

fangreiche Rechnungen führt. Die in der vorliegenden Arbeit angegebenen Näherungsmethoden zeichnen sich dadurch aus, daß auch bei Annahme höherer Glieder in dem Ausdruck für die Restitutionskraft die Rechenarbeit nicht übermäßig anwächst.

Auf den hohen Wert der experimentellen Untersuchung des eisenhaltigen Schwingungskreises durch Martienssen wurde in der sich an den Vortrag von Petersen (Elektrotechn. Zeitschr. 1915, Heft 28) anschließenden Diskussion hingewiesen.

In derselben Diskussion erwähnt K. W. Wagner die Instabilität des unserem Punkt 5 (Fig. 11) entsprechenden Betriebszustandes, wobei er eine aufgedrückte konstante Klemmenspannung voraussetzt. Der Beweis, den Wagner (Elektrotechn. Zeitschr. 1916, S. 149) hierfür gibt, ist außerordentlich anschaulich und bestechend einfach; da jedoch darin mit Mittelwerten von Strom und Spannung operiert wird, läßt er sich auf den Fall unseres Versuchspendels nicht ohne weiteres übertragen. Der Beweis steht auf rein kinematischer Grundlage, da ein periodischer Bewegungszustand mit benachbarten Bewegungszuständen verglichen wird, die ebenfalls als periodisch vorausgesetzt werden. Er kann daher als restlose Beantwortung der Frage nach der Stabilität des eisengeschlossenen Schwingungskreises ebensowenig gelten wie unsere Ausführungen 27, obgleich die Schlußfolgerungen Wagners mit den Erscheinungen auch beim Pendelversuch vollständig im Einklang stehen.

29. Ein wichtiger Fall, der in dem Grenzgebiet zwischen Elektrotechnik und Maschinenbau (soweit eine solche Bezeichnung heute noch angebracht ist) liegt, wird dargestellt durch die auf eine konstante Sammelschienenspannung arbeitende synchrone Drehstrommaschine (vgl. die Darstellung von Pichelmayer, „Wechselstromerzeuger", Göschen 1911, S. 21).

Setzt man bei einer solchen Maschine ungesättigtes Eisen voraus, so hat man bei konstanter Magneterregung den Fall eines Kreispendels: in Wirklichkeit ist infolge der Eisensättigung dieser Fall sehr annähernd realisiert und kann in der Nähe der Resonanz nach unserer Gleichung 1a) beurteilt werden.

Betrachtet man einen idealen synchronen Drehstromgenerator (Ohmscher Widerstand der Ankerwickelung = 0, gesamter Blindwiderstand konstant = x, Volltrommelmaschine), so folgt aus

Digitized by Google

dem Spannungsdreieck OAB (Fig. 18) in bekannter Weise die elektrische Leistung:

$$L_e = e J \sqrt{3} \cos \varphi = \sqrt{3} \frac{e E \sin \psi}{x}.$$

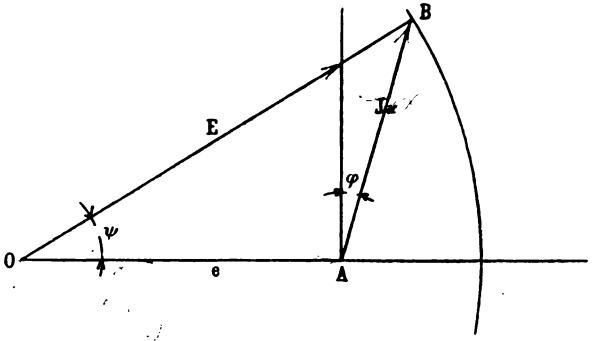
Bei konstanter Erregung des Magnetfeldes ist E konstant und die elektrische Leistung daher proportional $\sin \psi$, wo ψ den Winkel (in Phasengraden gemessen) bedeutet, um den das Magnetfeld dem Drehfelde des Ankers vorauseilt.

Die kinetische Energie des Magnetrades sei

$$T = \frac{1}{2} \Theta \cdot w^2,$$

wo Θ das Trägheitsmoment und w die Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Als Maßsystem sei das absolute elektromagnetische cgs-System vorausgesetzt.

Fig. 18.



Die Bewegungsgleichung des Magnetrades ergibt sich aus dem Leistungssatze

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma L,$$

der eine Verallgemeinerung des rein mechanischen Satzes

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma (X v_x + Y v_y + Z v_z)$$

ist, worin X, Y, Z die Kraftkomponenten, v_x, v_y, v_z die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten bedeuten.

Es ist nun $\Sigma L = L_m - L_e =$ Maschinenantriebsleistung, vermindert um die vom Generator aufgebrachte elektrische Leistung.

Bezeichnet D_m die Größe des Antriebdrehmomentes zur Zeit t, so ist $L_m = D_m . w$.

Digitized by Google

Man erhält die Bewegungsgleichung:

$$\Theta w \frac{dw}{dt} = D_m \cdot w - \sqrt{3}\,\frac{Ee}{x} \sin \psi \text{ [1]}.$$

Das Drehmoment D_m setzt sich zusammen aus dem konstanten Drehmoment des Beharrungszustandes D_0 und einem veränderlichen Teil D, es ist

$$D_m = D_0 + D,$$

wo

$$D_0 \cdot w_0 = \sqrt{3}\,\frac{Ee}{x} \cdot \sin \psi_0.$$

Die Bewegungsgleichung wird daher:

$$\Theta w \frac{dw}{dt} = \frac{w}{w_0} \sqrt{3}\,\frac{Ee}{x} \sin \psi_0 + D w - \sqrt{3}\,\frac{Ee}{x} \sin \psi.$$

Es ist ferner

$$w = w_0 + \frac{1}{p}\,\frac{d\psi}{dt},$$

wo p die Anzahl der Polpaare bedeutet.

Nun ist $\frac{w}{w_0}$ annähernd gleich 1. Unter dieser Voraussetzung erhält man die Bewegungsgleichung in der Form:

$$\frac{\Theta w_0}{p}\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + \sqrt{3}\,\frac{Ee}{x}(\sin \psi - \sin \psi_0) = D \cdot w_0$$

oder

$$g\,\frac{\Theta w_0}{p}\,\frac{x}{\sqrt{3}\,Ee}\,\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\,(\sin \psi - \sin \psi_0) = D \cdot w_0\, g\,\frac{x}{\sqrt{3}Ee}.$$

Führt man die ideale Pendellänge

$$L = g\,\frac{\Theta w_0}{p}\,\frac{x}{\sqrt{3}Ee}$$

---

[1]) Nach Pichelmayer, Wechselstromerzeuger, Göschen 1911, S. 67 ist bei Drehstrommaschinen mit Einzelpolen die elektrische Leistung in Abhängigkeit von unserem Winkel ψ von der Form:

$$L_e = a \sin \psi + b \sin \psi \cos \psi.$$

Bei dieser Form von L_e wird die Bewegungsgleichung, welche jetzt nicht mehr mit der Bewegungsgleichung des Kreispendels übereinstimmt, auf die Form 62), S. 58 unter Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung reduziert. Nach der zahlenmäßigen Bestimmung der Koeffizienten α, β, γ geben die Formeln 71), S. 70 Auskunft über das Verhalten des Schwingungssystems.

Digitized by Google

ein und berücksichtigt von dem Ausdruck D nur ein Glied $D_1 \sin \omega t$, wo ω in gewisser, durch die Art der Antriebsmaschine bestimmter Weise, von w abhängt, so ist unsere Bewegungsgleichung:

$$L \frac{d^2 \psi}{dt^2} + g (\sin \psi - \sin \psi_0) = k \sin \omega t,$$

wo

$$k = D_1 w_0 g \frac{x}{\sqrt{3} E e} = g \frac{D_1}{D_0} \sin \psi_0.$$

Die ideale Pendellänge L hängt von den Maschinen- und Betriebskonstanten ab, k ist bedingt durch die Antriebsverhältnisse.

Man kann daher das Verhalten der Maschine durch ein unsymmetrisches Pendel veranschaulichen.

Diese Bewegungsgleichung behandeln wir gemäß 17) und 18) durch die Annäherung 72), S. 70. Wir erhalten noch mit $\alpha = \frac{g}{L} \cos \psi_0$ angenähert den statischen Ausschlag

$$s = \frac{k}{\alpha} = L \frac{D_1}{D_0} \operatorname{tg} \psi_0 \quad \text{oder} \quad \frac{s}{L} = \frac{D_1}{D_0} \operatorname{tg} \psi_0 .$$

30. Nehmen wir als Beispiel einen Drehstromgenerator, der bei voller, nahezu induktionsfreier Belastung eine Voreilung $\psi_0 = 40^0$ hat und der ohne Änderung der Erregung auch im Leerlauf (streng genommen: bei sehr geringer Belastung) keine Störungen im Parallelbetriebe ergeben soll. Für diese beiden Zustände ist bzw.:

$$\alpha_1 = \frac{g}{L} \cos 40^0 = \frac{g}{L} \cdot 0{,}7660, \quad \alpha_2 = \frac{g}{L} \cos 0^0 = \frac{g}{L},$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0{,}7660.$$

In Wirklichkeit ist der Antrieb einer solchen Maschine nicht derart, daß man sich mit dem einzigen Glied $k \sin \omega t$ auf der rechten Seite unserer Differentialgleichung begnügen könnte, sondern es macht sich noch der Einfluß von Gliedern mit $\sin 2\omega t$, $\cos 2\omega t$ ... usw. geltend.

Von dem Gesichtspunkte der linearen Differentialgleichung, von dem das Problem bis heute betrachtet worden ist, gilt das Gesetz der Superposition, d. h. man bestimmt die erzwungene Schwingung für jedes einzelne Glied der die Erregung darstellenden goniometrischen Reihe und addiert die Resultate. Wenn die

Digitized by Google

Summe dieser Einzelresultate eine gewisse Größe, deren Festsetzung Aufgabe des Elektromaschinenbaues ist, nicht überschreitet, so erwartet man nach dieser Theorie einen ungestörten Betrieb.

Daß trotzdem solche Anlagen versagen können, folgt aus unseren Betrachtungen über die pseudoharmonische Schwingung, bei der, wie wir gesehen haben, die Bewegung nicht eindeutig durch die Erregung bestimmt ist.

Streng genommen erfordert die Berücksichtigung mehrerer Glieder auf der rechten Seite unserer Differentialgleichung eine neue erweiterte Untersuchung (vgl. Nr. 31). Wenn wir im folgenden den Einfluß eines einzelnen Gliedes für sich betrachten, so gilt das Resultat nur unter der Voraussetzung, daß die anderen Glieder wirklich unterdrückt sind. Ein Gesamtresultat kann man daraus durch Addition nicht herleiten, wohl aber dürfte das Vorgehen genügen, um den Gefahrpunkt zu zeigen.

Um ein bestimmtes Bild vor Augen zu haben, nehmen wir einen Antrieb an, der, außer der Grundschwingung mit 100 minutlichen Kraftwirkungen, noch eine Oberschwingung mit 200 minutlichen Kraftwirkungen enthält.

Es sollen nun die beiden Frequenzen $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\alpha_2}$, deren Verhältnis $\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = 0{,}8752$ ist, passend zwischen die beiden Antriebsfrequenzen:

$$\omega_1 = \frac{100}{60} \cdot 2\pi = 10{,}472\,\text{sek}^{-1}$$

(entsprechend 100 minutlichen Kraftwirkungen),

$$\omega_2 = \frac{200}{60} \cdot 2\pi = 20{,}944\,\text{sek}^{-1}$$

(entsprechend 200 minutlichen Kraftwirkungen)

gelegt werden, wodurch dann

$$L = \frac{g}{\alpha} \cos\psi_0$$

und damit auch

$$\Theta = \frac{pL}{gw_0} \frac{\sqrt{3}Ee}{x}$$

bestimmt ist. Bei diesem Vorgehen sind wir aufs Probieren angewiesen.

Nimmt man folgende Verhältnisse an:

$$\omega_1 = 10{,}472\,\text{sek}^{-1}, \quad \sqrt{\alpha_1} = 14{,}93\,\text{sek}^{-1}, \quad \sqrt{\alpha_2} = 17{,}06\,\text{sek}^{-1},$$
$$\omega_2 = 20{,}944\,\text{sek}^{-1},$$

Digitized by Google

so ist

$$1 - \frac{\omega_1^2}{\alpha_1} = 0{,}508, \quad 1 - \frac{\omega_2^2}{\alpha_2} = -0{,}508.$$

Es wäre Zufall, wenn man in Wirklichkeit diese Zahlen erreichte. Die Berechnung der Maschinenkonstanten (insbesondere des Blindwiderstandes x) ist mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, die noch durch Schwankungen in der Beschaffenheit des Materials und der Ausführung vergrößert wird. Der Betrag des Fehlers ist mit $\pm$ 8 Proz. bei Berechnung der Werte von $\sqrt{\alpha}$ nicht zu hoch gegriffen.

Wir hätten also etwa zu rechnen mit

$$\alpha_1 = 222{,}83 \,.\, 0{,}85\,\text{sek}^{-2}, \quad \alpha_2 = 290{,}91 \,.\, 0{,}85\,\text{sek}^{-2},$$

$$1 - \frac{\omega_1^2}{\alpha_1} = 0{,}421, \qquad 1 - \frac{\omega_2^2}{\alpha_2} = -0{,}775,$$

und diese Zustände seien in einem Diagramm vor Augen geführt (Fig. 19).

Wir zeichnen die Kurve POP, deren Gleichung

$$\frac{\zeta}{L} = \frac{A^3}{L^3}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{tg}^2\psi_0}{1 - \frac{1}{4}\frac{A^2}{L^2}}\right]$$

ist, und die Kurve OQ, deren Gleichung

$$\frac{\zeta}{L} = \frac{1}{8}\,\frac{A^3}{L^3}$$

ist, entsprechend $\psi_0 = 0$ (Leerlauf).

Durch den Punkt S, der dem Werte $\frac{s}{L} = 0{,}1$ entspricht, legen wir die Geraden I und II, entsprechend den Werten:

$$1 - \frac{\omega_1^2}{\alpha_1} = 0{,}421, \quad 1 - \frac{\omega_2^2}{\alpha_2} = -0{,}775.$$

Man sieht, daß die Schnittpunkte 1 und 3 auf den fast geradlinigen Teilen der Kurven P und Q liegen, so daß die Pendelausschläge praktisch ohne Fehler nach den Formeln der harmonischen Schwingung berechnet werden können.

Man sieht aber weiter, daß man mit Punkt 1 nicht näher gegen den Punkt 5 heranrücken kann, ohne Gefahr zu laufen, daß die Phase 1 nach 3′ umschlägt. Denn die Kurven P und Q sind infolge der Bewegungswiderstände, wie der Versuch ergeben

Digitized by Google

t, in Wirklichkeit stärker gekrümmt als auf der Zeichnung, d die Gefahr des Umschlagens in die Phase 3′ besteht lange r Erreichung des Punktes 5.

Man wird sich also vorsichtigerweise mit dem Zustande, der rch I repräsentiert wird, weiter von der Resonanz entfernen

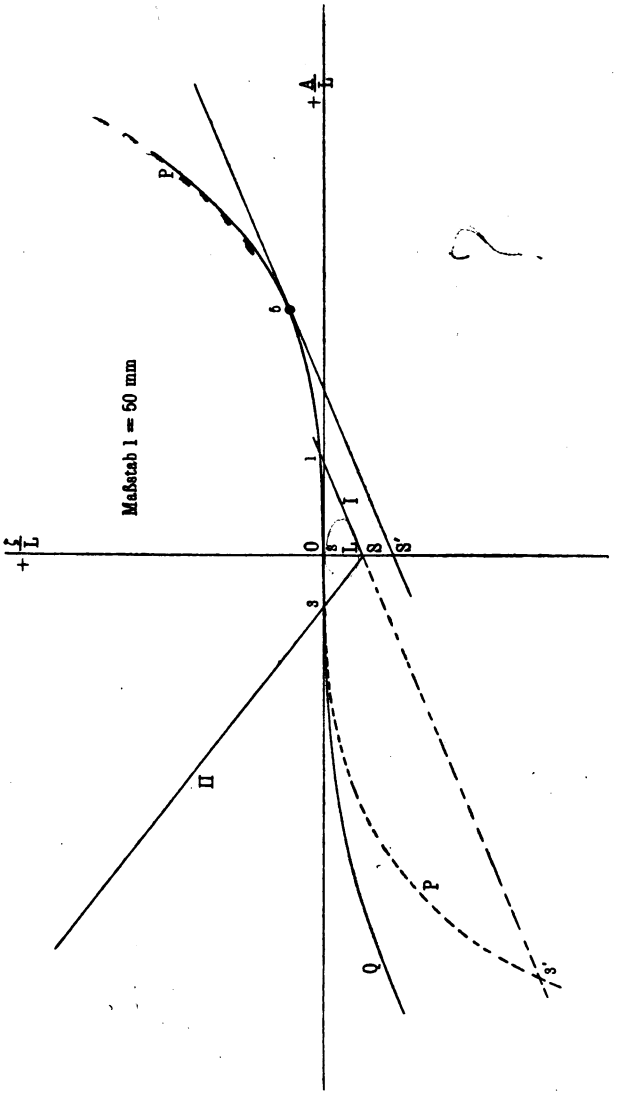


Fig. 19.

Digitized by Google

ohne Rücksicht darauf, daß dann der Zustand II sich der Reso-
nanz nähern muß; bei dem Punkt 3 besteht keinerlei Gefahr
die Bewegungsphase ist stabil.

Es sei aber betont, daß das geschilderte Verhalten des Antriebe
unter Resonanz nur bei positivem γ besteht [Gleichung 71), S. 70]

Bei negativem γ kehrt sich das Verhalten des Systems um
entsprechend der Gestalt der Kurven POP und OQ. Der Wert
$\frac{s}{L} = 0{,}1$ ergibt $\frac{D_1}{D_0} = 0{,}1 \cot \psi_0 = 0{,}119$.

Die Amplitude der betreffenden Harmonischen dürfte nicht
mehr als 12 Proz. des mittleren Drehmomentes betragen, worauf
insbesondere beim Antrieb durch Kolbenmaschinen zu achten ist.
Die Verwendung eines „unterschweren" Schwungrades, wenn sie
überhaupt möglich ist, verlangt daher große Sorgfalt bei Berech-
nung und Dimensionierung.

VII. Verallgemeinerungen.

31. Auf S. 105 mußten wir den Fall einer Erregung, die nicht
einfach harmonisch war, flüchtig in Betracht ziehen.

Es sei daher noch die Gelegenheit wahrgenommen, in Kürze
die beiden Gleichungen

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 = h \sin pt + k \sin qt \qquad 1]$$

und

$$\ddot{x} + \alpha x - \gamma x^3 = h \sin pt + k \sin qt, \qquad 2]$$

die auch in der Akustik von Bedeutung sind, zu behandeln[1].

Zur Lösung von 1) (unsymmetrischer Fall) nehmen wir an

$$x_0 = A \sin pt + B \sin qt + C \qquad 3]$$

und finden aus

$$\ddot{x}_1 = h \sin pt + k \sin qt - \alpha x_0 + \beta x_0^2$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 = {} & \frac{-h + \alpha A - 2\beta AC}{p^2} \sin pt + \frac{-k + \alpha B - 2\beta BC}{q^2} \sin qt \\ & + \frac{\beta}{8p^2} A^2 \cos 2pt + \frac{\beta}{8q^2} B^2 \cos 2qt - \frac{\beta AB}{(p-q)^2} \cos (p-q)t \\ & + \frac{\beta AB}{(p+q)^2} \cos (p+q)t + D, \end{aligned}\right\} \qquad 4]$$

[1] Vgl. Schäfer, Einführung in die theoretische Physik, S. 144. Leipzig
Veit & Co., 1914.

Digitized by Google

obei C der Bedingung

$$\beta C^2 - \alpha C = -\beta \frac{A^2 + B^2}{2} \qquad 5)$$

enügen muß.

Wir machen dann die Annahme

$$\frac{-h + \alpha A - 2\beta AC}{p^2} = A, \quad \frac{-k + \alpha B - 2\beta BC}{q^2} = B.$$

Wenn wir β als kleine Größe voraussetzen und nur die chwingungen in Betracht ziehen, bei denen auch C klein bleibt, o wird

$$C = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}(A^2 + B^2), \qquad 6)$$

nd die Größen A und B müssen die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - p^2)A - \frac{\beta^2}{\alpha} A(A^2 + B^2) &= h,\\ (\alpha - q^2)B - \frac{\beta^2}{\alpha} B(A^2 + B^2) &= k\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

rfüllen.

Die so erhaltene Annäherung

$$x_1 = A\sin pt + B\sin qt + \frac{\beta}{8p^2} A^2 \cos 2pt + \cdots$$

ann dann zur Ermittelung weiterer Näherungswerte $x_2, x_3 \ldots$ benutzt werden, was prinzipiell keine Schwierigkeiten, sondern nur echnerische Umständlichkeiten verursacht.

Um eine Übersicht über die Wurzeln der Gleichungen 7) zu rhalten, setzen wir

$$\beta = \frac{\alpha}{l}, \quad \frac{h}{\alpha} = a, \quad \frac{k}{\alpha} = b.$$

Die Größen l, a, b haben dann dieselbe Dimension wie x, nd wenn wir dann noch

$$\frac{A}{l} = \xi, \quad \frac{B}{l} = \eta, \quad \frac{a}{l} = m, \quad \frac{b}{l} = n$$

inführen, so gehen die Gleichungen 7) über in

$$\frac{1}{\xi}\left[\left(1 - \frac{p^2}{\alpha}\right)\xi - m - \xi^3\right] = \eta^2, \qquad 8)$$

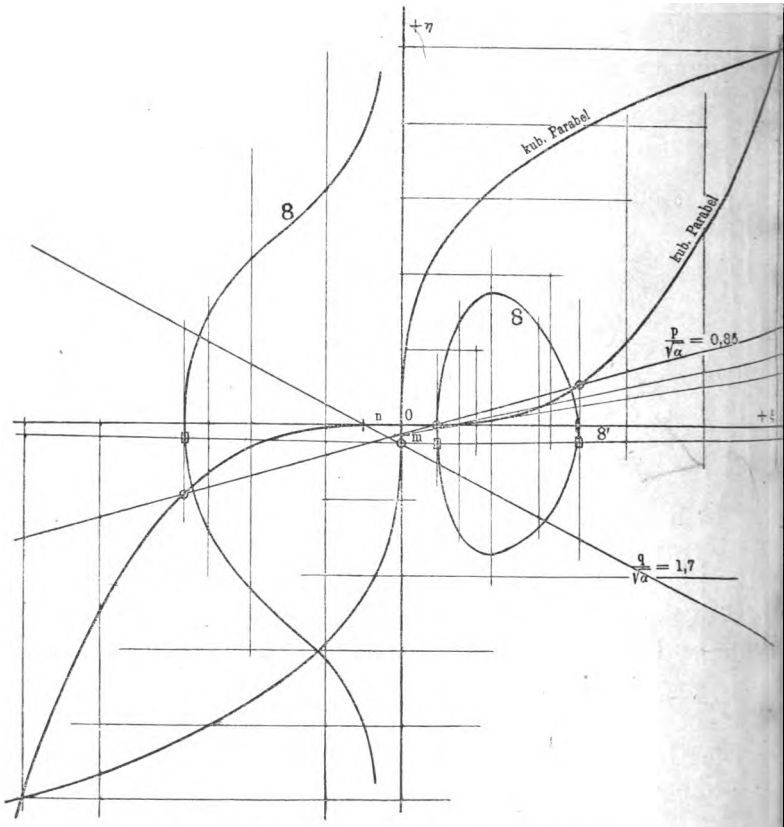
$$\frac{1}{\eta}\left[\left(1 - \frac{q^2}{\alpha}\right)\eta - n - \eta^3\right] = \xi^2 \qquad 8')$$

Digitized by Google

Die Schnittpunkte der beiden Kurven 8) ergeben dann die Wur-
zeln von 7).

Um den Zusammenhang mit den früheren Ergebnissen zu
behalten, stellen wir den Ausdruck in der Klammer als Differenz
der Ordinaten unserer charakteristischen Geraden und der kubi-

Fig. 20.



schen Parabel dar. Die noch notwendige Division und Wurzel-
ausziehung, die entweder graphisch oder rechnerisch bewerkstelligt
werden können, ergeben dann leicht den Verlauf der Kurven 8) und 8').

Das Diagramm Fig. 20 zeigt die Verhältnisse für

$$\frac{p}{\sqrt{\alpha}} = 0{,}45, \quad \frac{q}{\sqrt{\alpha}} = 1{,}70, \quad m = 0{,}03, \quad n = 0{,}10.$$

0.85

Digitized by Google

Wie man sieht, hätte man die Koeffizienten A, B unabhängig
einander nach unserem ursprünglichen Verfahren ermitteln
innen, wobei nur das zu dem absolut größten A gehörige B
nen größeren Fehler enthalten hätte. Aber auch dieser Um-
and kann mit in Kauf genommen werden, falls man auf Grund
s so ermittelten A noch weitere Näherungswerte x_2, x_3 ... be-
chnet.

Der Natur der Gleichung 8) entsprechend können aber noch
mpliziertere Verhältnisse eintreten, die sich nur an Hand der
urvenschnitte verfolgen lassen. Die Konvergenz- und Stabilitäts-
agen dürften hier Schwierigkeiten in erhöhtem Maße bieten.

Zur Lösung von 2) (symmetrischer Fall) nehmen wir an

$$x_0 = A \sin pt + B \sin qt \tag{9}$$

id finden

$$\left.\begin{aligned} = A \sin pt + B \sin qt + \frac{1}{36}\frac{\gamma}{p^2} A^3 \sin 3pt + \frac{1}{36}\frac{\gamma}{q^2} B^3 \sin 3qt \\ + \frac{3}{4}\gamma A^2 B \left\{\frac{\sin(q+2p)t}{(q+2p)^2} + \frac{\sin(q-2p)t}{(q-2p)^2}\right\} \\ + \frac{3}{4}\gamma A B^2 \left\{\frac{\sin(p+2q)t}{(p+2q)^2} + \frac{\sin(p-2q)t}{(p-2q)^2}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

bei die A und B den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - p^2)A - \frac{3}{4}\gamma A[A^2 + 2B^2] = h, \\ (\alpha - q^2)B - \frac{3}{4}\gamma B[B^2 + 2A^2] = k \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

nügen müssen.

Die Lösung erfolgt genau analog dem Vorhergehenden. Wir
zen

$$\gamma = \frac{\alpha}{l^2}, \quad \frac{h}{\alpha} = a, \quad \frac{k}{\alpha} = b,$$

$$\frac{A}{l} = \xi, \quad \frac{B}{l} = \eta, \quad \frac{a}{l} = m, \quad \frac{b}{l} = n$$

d erhalten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\xi}\left[\left(1 - \frac{p^2}{\alpha}\right)\xi - m - \frac{3}{4}\xi^3\right] = \eta^2, \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\eta}\left[\left(1 - \frac{q^2}{\alpha}\right)\eta - n - \frac{3}{4}\eta^3\right] = \xi^2, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Digitized by Google

deren graphische Behandlung sich von derjenigen von 8) in nichts unterscheidet.

Ist die Erregung nicht als Summe zweier einfachen Harmonischen, sondern in Form eines Fourierschen Annäherungspolynoms gegeben, so dürfte es sich vorläufig empfehlen, in Ermangelung eines besseren Weges nur die beiden Koeffizienten, deren zugehörige Frequenzen die Frequenz $\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}$ einschließen, nach der hier auseinandergesetzten Methode zu bestimmen und die anderen so zu ermitteln, als ob sie allein vorhanden wären. Es müßte aber noch der nächste Näherungswert herangezogen werden, um sicher zu sein, daß die erste Annäherung zulässig war.

32. Wir wollen das angedeutete Näherungsverfahren durchführen, uns aber dabei auf den symmetrischen Fall beschränken, der durch die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha x - \gamma x^3 = {} & h_1 \cos \omega t + h_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ & + k_1 \sin \omega t + k_2 \sin 2\omega t + \cdots \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

beschrieben wird; wir nehmen dabei an, daß die Erregung durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden kann, und vereinfachen den Rechnungsgang noch durch die Annahme annähernder Resonanz.

Wenn keine der Größen ω, 2ω usw. nahe bei $\sqrt{\alpha}$ liegt und γ als klein gegen α vorausgesetzt wird, so kann man als ersten Näherungswert[1]) ansetzen

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_0 = {} & a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ & + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

wo

$$a_n = \frac{h_n}{\alpha - n^2\omega^2}, \qquad b_n = \frac{k_n}{\alpha - n^2\omega^2},$$

und hieraus, falls ein Bedürfnis dazu vorliegt, durch sukzessive Näherungen genauere Werte $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots$ gewinnen. Wegen der Kleinheit von γ werden auch die Differenzen $\bar{x}_1 - \bar{x}_0$, $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ klein bleiben.

Wenn aber eine der Größen ω, ω_n dem Wert von $\sqrt{\alpha}$ sehr nahe kommt, so werden wegen der großen a_n, b_n die Korrekturen groß und der Wert $\bar{x}_0$ nach Formel 2) kann nicht mehr als Näherungswert gelten

[1]) Vgl. Rayleigh, Theory of Sound, II. Ed., Vol. I, p. 79.

Digitized by Google

Nehmen wir z. B. an $|1-\frac{\omega^2}{\alpha}| \ll 1$, so kann man einen rauchbaren Näherungswert x_0 erhalten durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} x_0 = {} & A_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots \\ & + B_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

o A_1 und B_1 gemäß der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \alpha x - \gamma x^3 = h_1 \cos\omega t + k_1 \sin\omega t \quad 4)$$

ach unserer Methode bestimmt werden, also unter Vernachässigung aller übrigen Größen h und k.

Man erreicht dadurch, daß A_1 und B_1 durch ihren eigenen influß möglichst wenig korrigiert werden, während der Einfluß er übrigen a und b durch die Multiplikation mit γ entsprechend lein wird. Wäre $\gamma = 0$, so würden weder A_1, B_1 noch die a nd b bei den folgenden Stufen des Prozesses geändert werden.

Hat man die Überzeugung, daß man sich mit x_0 begnügen ann, so bleibt noch die Summation der Reihe für x_0 übrig, die if folgendem Wege umgangen werden kann. Es sei

$$\left.\begin{aligned} F(t) = {} & \frac{h_0}{2} + h_1 \cos\omega t + h_2 \cos 2\omega t + \cdots \\ & + k_1 \sin\omega t + k_2 \sin 2\omega t + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

) besteht die Identität [vgl. Formel 19), S. 10]

$$\left.\begin{aligned} & \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots, \; + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots \\ & \equiv \frac{1}{2\lambda \sin\frac{\lambda T}{2}} \int_{t-\frac{2\pi}{\omega}}^{t} \left[F(v) - \frac{h_0}{2}\right] \cos\lambda\left(t - v - \frac{T}{2}\right) dv, \\ & \qquad \text{wo } T = \frac{2\pi}{\omega} \\ & \qquad \text{und } \lambda^2 = \alpha, \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

eil

$$\left.\begin{aligned} & \frac{1}{2\lambda \sin\frac{\lambda T}{2}} \int_{t-\frac{2\pi}{\omega}}^{t} \cos n\omega v \,.\, \cos\lambda\left(t - v - \frac{T}{2}\right) dv \\ & = \frac{1}{\lambda^2 - n^2\omega^2} \cos n\omega t \\ & = \frac{1}{\alpha - n^2\omega^2} \cos n\omega t. \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Digitized by Google

Vorausgesetzt ist dabei, daß $\sin\frac{\lambda T}{2} = \sin\frac{\lambda\pi}{\omega}$ nicht verschwindet, und ferner, daß die Fouriersche Reihe gliedweise integriert werden darf, was zutrifft, wenn $F(t)$ eine abteilungsweise stetige und überall endliche Funktion von t ist.

Man hat daher

$$\left.\begin{aligned} x_0 = \frac{1}{2\lambda\sin\frac{\lambda T}{\omega}} \int_{t-\frac{2\pi}{\omega}}^{t} \left[F(v) - \frac{h_0}{2}\right] \cos\lambda\left(t - v - \frac{\pi}{\omega}\right) dv \\ + (A_1 - a_1)\cos\omega t \\ + (B_1 - b_1)\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Von besonderem Interesse ist der Fall $\omega = \lambda = \sqrt{\alpha}$. Es wird dann das erste Glied der rechten Seite unendlich groß; von derselben Ordnung werden aber auch a_1 und b_1 unendlich groß. Macht man nun den Grenzübergang $\lim \omega = \lambda$, so ergibt sich x_0 in geschlossener Form.

Zur Erläuterung wählen wir die Form der Erregung von Beispiel 2, S. 18.

Es ist alsdann

$$R(t) = \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{2\cos 2\omega t}{1.3} - \frac{2\cos 4\omega t}{3.5} - \frac{2\cos 6\omega t}{5.7} - \cdots\right], \quad 9)$$

und es sei die Bewegung zu ermitteln für den Fall, daß $\omega = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$ ist.

Unter Benutzung des Ausdruckes, den wir auf S. 19 für die erzwungene Schwingung gefunden haben, folgt dann

$$x_0 = -\frac{h_0}{2\lambda^2} + \frac{\omega}{\lambda(\omega^2 - \lambda^2)}\left\{\sin\lambda t + \cot\frac{\lambda\pi}{2\omega}\cos\lambda t\right\} - \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}\sin\omega t + (A_2 - a_2)\cos 2\omega t$$

oder mit $\qquad h_0 = \frac{4}{\pi}, \qquad a_2 = -\frac{4}{3\pi}\frac{1}{\lambda^2 - 4\omega^2}$

$$x_0 = -\frac{2}{\pi\lambda^2} - \frac{2}{3\lambda^2}\sin\lambda t + \frac{4}{3\lambda^2}\sin\frac{\lambda t}{2} + A_2\cos\lambda t + \lim_{\omega=\frac{\lambda}{2}}\left\{\frac{\omega}{\lambda(\omega^2 - \lambda^2)}\cot\frac{\lambda\pi}{2\omega}\cos\lambda t + \frac{4}{3\pi}\frac{1}{\lambda^2 - 4\omega^2}\cos 2\omega t\right.$$

Digitized by Google

Um den Grenzübergang zu machen, substituieren wir in der geschweiften Klammer $\omega = \frac{\lambda}{2} + \varepsilon$ und erhalten dann für den Klammerausdruck

$$\frac{1}{3\lambda\pi\varepsilon}\cos\lambda t - \frac{1}{3\lambda\pi\varepsilon}(\cos\lambda t\cos 2\varepsilon t - \sin\lambda t\sin 2\varepsilon t)$$

und den Wert

$$\frac{2}{3\pi\lambda}\, t\sin\lambda t$$

für $\lim\varepsilon = 0$.

Schließlich ist

$$x_0 = -\frac{2}{\pi\lambda^2} - \frac{2}{3\lambda^2}\sin\lambda t + \frac{4}{3\lambda^2}\sin\frac{\lambda t}{2} + \frac{2}{3\pi\lambda}\, t\sin\lambda t + A_2\cos\lambda t.$$

Nach früherem ist

$$A_2 = -\sqrt[3]{\frac{4}{3}\frac{h_2}{\gamma}} = \sqrt[3]{\frac{16}{9\pi\gamma}}.$$

Die Formel für x_0 gilt nur für das Intervall $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\lambda}$, wie schon S. 19 auseinandergesetzt wurde; x_0 hat die Periode $\frac{2\pi}{\lambda}$.

33. Fälle mit nicht-linearen Restitutionskräften bei Systemen von mehreren Freiheitsgraden dürften der rechnerischen Untersuchung sehr große Schwierigkeiten entgegensetzen, wie schon der Fall zweier elastisch gekuppelter Pendel, deren Trägheitsmomente von gleicher Größenordnung sind, zeigt. Ein solcher Fall ist in jeder Maschinenwelle, an der exzentrische Gewichte befestigt sind, verkörpert; die betreffenden Maschinen zeigen beim Durchgang durch die „kritischen Umdrehungszahlen" die charakteristischen Unterschiede des Antriebes unter und über Resonanz.

Zur Erklärung einiger ungewöhnlicher Erscheinungen im Bereiche der Technik dürften unsere Betrachtungen genügen.

Die Verfolgung der nicht-stationären (nicht periodischen) Zustände müßte sich bis heute auf die rechnerisch-graphische Behandlung konkreter Fälle unter der Annahme sehr kleiner Ausschläge beschränken. Der Ausgangspunkt hierfür wäre Gleichung 26), S. 31:

$$x = 4\sqrt{\frac{2\alpha}{\gamma}}\,[A\sin\lambda t + B\cos\lambda t],$$

Digitized by Google

unter Modifikation der Gleichung 30), S. 33, in

$$A = C - \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{\cos(\omega+\lambda)t}{\omega+\lambda} + \frac{\cos(\omega-\lambda)t}{\omega-\lambda}\right],$$

$$B = D + \frac{\varkappa}{2}\left[\frac{\sin(\omega+\lambda)t}{\omega+\lambda} - \frac{\sin(\omega-\lambda)t}{\omega-\lambda}\right],$$

worin C und D willkürliche Konstanten bedeuten, während A und B Funktionen von t sind, die der Bedingung $A^2 + B^2 = h$ genügen müssen. h und $\lambda = \sqrt{\alpha}(1 - 12h)$ sind langsam veränderliche Funktionen von t.

Die Durchführung der Rechnung begegnet keinen prinzipiellen Schwierigkeiten, sie würde Erscheinungen beschreiben, die den Schwebungen der harmonischen Bewegung ähneln, von diesen sich aber durch die eigentümliche Veränderlichkeit des Argumentes der Kreisfunktionen unterscheiden.

Digitized by Google

Anhang I.

Zusammenstellung einiger Formeln über elliptische Funktionen (Weierstrass).

Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen
:n Veränderlichen u und s

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3) = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

ıt die allgemeine Lösung

$$s = \wp(u + C),$$

o C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Es ist

$$+ e_2 + e_3 = 0, \quad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\frac{1}{4} g_2, \quad e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3.$$

Die Funktion

$$\wp u \equiv \wp(u; g_2, g_3) \equiv \wp(u|\omega, \omega')$$

es komplexen Argumentes u besitzt zwei voneinander unabhän-
ge (im allgemeinen komplexe) Perioden 2ω, $2\omega'$; g_2, g_3 heißen
e Invarianten.

Für die Umgebung des Wertes $u = 0$ gilt die Reihenent-
icklung:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{1200} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{6160} u^8 + \cdots$$

Ist 2ω, $2\omega'$ ein primitives Periodenpaar, so hängen diese
rößen mit e_1, e_2, e_3 in folgender Weise zusammen: es ist

$$e_1 = \wp\omega_1, \quad e_2 = \wp\omega_2, \quad e_3 = \wp\omega_3$$
$$= \wp\omega, \quad = \wp(\omega + \omega'), \quad = \wp\omega'.$$

Sind m und n zwei ganze Zahlen, von denen wenigstens
ne ungerade ist, und wird

$$m\omega + n\omega' = \tilde{\omega}$$

Digitized by Google

gesetzt, so ist

$$\wp(u \pm \tilde{\omega}) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda},$$

wobei

$\lambda = 1$, wenn m ungerade, n gerade,
$\lambda = 2$, wenn m ungerade, n ungerade,
$\lambda = 3$, wenn m gerade, n ungerade.

Die ganze transzendente, im Nullpunkt zur ersten Ordnung verschwindende Funktion σu ist mit $\wp u$ durch die Relation

$$\wp u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{d u^2}$$

verknüpft.

Für alle endlichen Werte des Argumentes u und der Invarianten g_2, g_3 wird die Funktion

$$\sigma u \equiv \sigma(u;\, g_2,\, g_3) \equiv \sigma(u|\omega,\, \omega')$$

dargestellt durch die Potenzreihe

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{240} u^5 - \frac{g_3}{840} u^7 - \frac{g_2^2}{161\,280} u^9 - \cdots$$

Die Funktion σ ist nicht periodisch, sondern erfüllt die Relation

$$\sigma(u \pm 2\omega) = -e^{\pm 2\eta(u \pm \omega)} \sigma u,$$

woraus sich nach Differentiation mit $u = \mp \omega$

$$\eta = \frac{\sigma' \omega}{\sigma \omega}$$

ergibt.

Der ungeraden Funktion σu mit der einzigen Nullstelle im Periodenparallelogramm bei $u = 0$ werden die drei geraden Funktionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ zur Seite gestellt, welche für $u = 0$ den Wert 1 annehmen und die Nullstellen bzw.

$$u = \omega, \quad u = \omega'' = \omega + \omega', \quad u = \omega'$$

besitzen. (Analog wie bei den Kreisfunktionen der ungeraden Funktion sin die eine gerade Funktion cos zur Seite gestellt wird.)

Es ist

$$\sigma_3 u = e^{-\eta' u} \frac{\sigma(\omega' + u)}{\sigma \omega'},$$

wo

$$\eta' = \frac{\sigma' \omega'}{\sigma \omega'}.$$

Digitized by Google

Ähnliche Formeln gelten für σ_1 und σ_2 (Schwarz F., Art. 18). Es ist ferner

$$\sqrt{\wp u - e_3} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}.$$

Der Zusammenhang mit den Jacobischen elliptischen Funktionen geht aus der Formel

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \operatorname{sin\,am}\left(\sqrt{e_1 - e_3} \cdot u, k\right),$$

wo

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

und ähnlichen hervor.

Zu allen äquivalenten Periodenpaaren gehört nur eine σ-Funktion. Hierin liegt ein großer Vorzug der Funktionen σu, $\frac{\sigma'}{\sigma} u$, $\wp u$ vor den ϑ-Funktionen, der es nützlich erscheinen läßt, bei der allgemeinen Untersuchung mit den Funktionen σ, $\frac{\sigma'}{\sigma}$, $\wp$ zu operieren. Erst wenn man sich zwecks numerischer Berechnung für ein bestimmtes Periodenpaar entschieden hat, ist es vorteilhaft, zu den wegen ihrer raschen Konvergenz unschätzbaren ϑ-Reihen überzugehen.

Bezüglich aller weiteren Fragen, insbesondere der numerischen Berechnung sei auf Schwarz F., Art. 44, 45, 46, verwiesen. Hiervon kommt für unsere Zwecke vorwiegend in Betracht: die Berechnung der fundamentalen Größe

$$h = \frac{1}{2} l + 2\left(\frac{1}{2} l\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2} l\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2} l\right)^{13} + \cdots,$$

wobei

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}.$$

Die Genauigkeit der Berechnung der Größe h ist für alle weiteren Resultate maßgebend; h muß mindestens mit der Genauigkeit berechnet werden, die im Schlußresultat erzielt werden soll; eine etwas weiter getriebene Genauigkeit ist der Sicherheit halber anzuempfehlen.

Digitized by Google

Die Halbperioden können nach den Formeln

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} (1 + 2h^4 + 2h^{16} + \cdots),$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 i}{\pi} \log\left(\frac{1}{h}\right)$$

berechnet werden.

Zur Berechnung der Funktionen σu und $\sigma_3 u$ hat man die Formeln:

$$\sigma u = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\sin v\pi - h^2 \sin 3v\pi + h^6 \sin 5v\pi + \cdots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^{12} + \cdots},$$

$$\sigma_3 u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{1 - 2h\cos 2v\pi + 2h^4 \cos 4v\pi - 2h^9 \cos 6v\pi + \cdots}{1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots},$$

wo

$$v = \frac{u}{2\omega_1}, \quad 2\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{6} \frac{1 - 3^3h^2 + 5^3h^6 - 7^3h^{12} + \cdots}{1 - 3h^2 + 5h^6 - 7h^{12} + \cdots}.$$

Es ist selbstverständlich nicht beabsichtigt, hiermit einen Abriß der Theorie der elliptischen Funktionen zu geben. Es sollte lediglich eine gedrängte Zusammenstellung der gebrauchten Formeln geboten werden. Ein eingehendes Studium dieser Theorie ist für viele Probleme der Dynamik unentbehrlich.

Anhang II.

Zur Integration der elliptischen Differentialgleichung.

Weierstrass behandelt in Bd. VI seiner gesamten Werke, S. 143 bis 151, die Integration der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = R(x).$$

Er drückt die Invarianten g_2, g_3 der Normalform $4s^3 - g_2 s - g_3$ rational durch die Koeffizienten A, B, C... aus und findet:

$$g_2 = AA' - 4BB' + 3C^2,$$
$$g_3 = ACA' + 2BCB' - A'B'^2 - C^3.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gibt er dann in der Form:

$$x = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{A}\,\wp'(u - u_0) - 2B\,\wp(u - u_0) + BC - AB'}{A\,\wp(u - u_0) - B^2 + AC}$$

mit der willkürlichen Konstanten u_0.

Digitized by Google

Zur zahlenmäßigen Auswertung sind hier die Größen e_1, e_2, e_3 als Wurzeln der Gleichung:

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

zu ermitteln und die ϑ-Reihen einzuführen. In diesem Falle wird, gegenüber dem einfacheren Rechnungsgange der vorliegenden Abhandlung, an Arbeit nichts erspart. Ganz abgesehen vom praktischen Werte ist aber das Studium der Weierstrassschen Abhandlung schon wegen der unübertrefflichen Eleganz des Rechnungsganges lohnend.

Anhang III.

Reduktion des Differentials $dx/\sqrt{R(x)}$ auf die Weierstrassschе Normalform.

Die durch Formel 66) dargestellte gebrochene lineare Substitution, die das Differential $\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ in $-\frac{ds}{\sqrt{S}}$ überführt, erscheint bei Weierstrass als Spezialfall einer sehr allgemeinen Transformation. Dieser Spezialfall entsteht dadurch, daß eine willkürliche Konstante x_0 gleich einer Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ angenommen wird.

Dieser Spezialfall wird von Prof. H. A. Schwarz in sehr einfacher Form direkt behandelt. Es sei daher hier die Ableitung der Formel 6) nach dem Vorlesungsheft von H. A. Schwarz kurz wiedergegeben.

Die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$R(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \qquad 1)$$

Wir stellen eine lineare gebrochene Substitution her, durch die die Werte

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta$$

von x in die Werte

$$\infty \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3$$

der Variabeln s übergeführt werden, wobei die Bedingung $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ vorgeschrieben ist.

Digitized by Google

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse von je vier einander entsprechenden Werten folgen die Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-\beta}{x-\alpha} &= -\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\cdot\frac{s-e_1}{e_1-e_3}, \quad \frac{x-\gamma}{x-\alpha} = -\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}\frac{s-e_2}{e_2-e_3}, \\ \frac{x-\delta}{x-\alpha} &= -\frac{\beta-\delta}{\alpha-\beta}\frac{s-e_3}{e_1-e_3} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Diese Resultate sind nur der Form nach verschieden, da die Doppelverhältnisse $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und (∞, e_1, e_2, e_3) einander gleich sind.

Umgekehrt ist:

$$\left.\begin{aligned} s-e_1 &= -(e_1-e_3)\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}\cdot\frac{x-\beta}{x-\alpha}, \\ s-e_2 &= -(e_2-e_3)\frac{\alpha-\delta}{\gamma-\delta}\frac{x-\gamma}{x-\alpha}, \\ s-e_3 &= -(e_1-e_3)\frac{\alpha-\beta}{\beta-\delta}\frac{x-\delta}{x-\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Hieraus ergeben sich die zusammengehörigen Werte:

$x=\alpha, s=\infty, \quad x=\beta, s=e_1, \quad x=\gamma, s=e_2, \quad x=\delta, s=e_3,$

wie es sein muß. Durch Einsetzen dieses Resultates in 2) folgt:

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}, \quad \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\delta}\frac{e_1-e_2}{e_2-e_3},$$

$$\frac{\gamma-\delta}{\alpha-\gamma}=\frac{\beta-\delta}{\alpha-\beta}\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

Hieraus ergeben sich die Verhältnisse:

$$\left.\begin{aligned} \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} &= \frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} = k'^2, \\ \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} &= \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)} = k^2, \\ \frac{e_1-e_2}{e_2-e_3} &= \frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)} = \frac{k'^2}{k^2}. \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Durch Differentiation folgt aus 2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{e_1-e_3}\frac{(\beta-\delta)(x-\alpha)^2}{(\alpha-\delta)(\alpha-\beta)}, \quad \frac{dx}{ds}=\frac{1}{e_2-e_3}\frac{(\gamma-\delta)(x-\alpha)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{1}{e_1-e_3}\frac{(\beta-\delta)(x-\alpha)^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}. \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Digitized by Google

Aus den beiden ersten Gleichungen 5) ergibt sich:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \frac{1}{(e_1-e_3)(e_2-e_3)} \frac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(x-\alpha)^4}{(x-\delta)^3(x-\beta)(x-\gamma)}$$

nd damit unter Benutzung von 2):

$$R(x) = -\frac{A}{4}\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{e_1-e_3}[4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)]\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$$

$$= -\frac{A}{4}\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{e_1-e_3} S\left(\frac{dx}{ds}\right)^2$$

mit $S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$.

Über die Konstanten soll nun so verfügt werden, daß

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{S}} \qquad 6)$$

ird. Es muß daher

$$-\frac{A}{4}\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{e_1-e_3} = 1$$

ein, dann folgt mit Hilfe von 4):

$$\left.\begin{aligned} e_1-e_3 &= -\frac{A}{4}(\alpha-\gamma)(\beta-\delta), \\ e_1-e_2 &= -\frac{A}{4}(\alpha-\delta)(\beta-\gamma), \\ e_2-e_3 &= -\frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\gamma-\delta). \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Durch Einsetzen der letzten Resultate in 3) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} s-e_1 &= \frac{A}{4}(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\frac{x-\beta}{x-\alpha} \\ &= \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\frac{1}{x-\alpha} + \frac{A}{4}(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta), \\ s-e_2 &= \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)\frac{x-\gamma}{x-\alpha} \\ &= \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\frac{1}{x-\alpha} + \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\delta), \\ s-e_3 &= \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\frac{x-\delta}{x-\alpha} \\ &= \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\frac{1}{x-\alpha} + \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma). \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Digitized by Google

Durch Addition dieser Ergebnisse folgt mit Rücksicht au die Bedingung $e_1 + e_2 + e_3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} s = \frac{A}{4}(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\frac{1}{x-\alpha} \\ + \frac{A}{12}[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)+(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)]. \end{aligned}\right\} 9$$

Diese Haupttransformationsformel für den Übergang vo $R(x)$ zu S (wobei der die Wurzel α repräsentierende Punkt in Unendliche projiziert wird), läßt sich einfacher schreiben, wem man berücksichtigt, daß

$$R'(x) = R(x)\left[\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}\right],$$

$$R''(x) = R(x)\left\{\left[\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}\right]^2 - \frac{1}{(x-\alpha)^2}-\frac{1}{(x-\beta)^2}-\frac{1}{(x-\gamma)^2}-\frac{1}{(x-\delta)^2}\right\},$$

also

$$R'(\alpha) = A(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta),$$

$$R''(\alpha) = 2[(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)+(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)+(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)].$$

Daher schließlich:

$$s = \frac{1}{4}\frac{R'(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{1}{24}R''(\alpha) \qquad 10$$

Dem Werte $x = \infty$ entspreche der Wert $s = s_0$; dann ist

$$s_0 = \frac{1}{24}R''(\alpha),$$

so daß man auch schreiben kann:

$$s - s_0 = \frac{1}{4}\frac{R'(\alpha)}{x-\alpha} \quad \text{oder} \quad x - \alpha = \frac{1}{4}\frac{R'(\alpha)}{s-s_0} \qquad 11$$

Aus 8) folgt noch:

$$S = \frac{A^2}{16}\frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2}{(x-\alpha)^4}R(x),$$

und wenn wir hieraus festsetzen:

$$\sqrt{S} = \frac{A(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{4(x-\alpha)^2}\sqrt{R(x)},$$

so ist $\sqrt{S}$ durch $\sqrt{R(x)}$ eindeutig bestimmt.

Digitized by Google

Anhang IV.

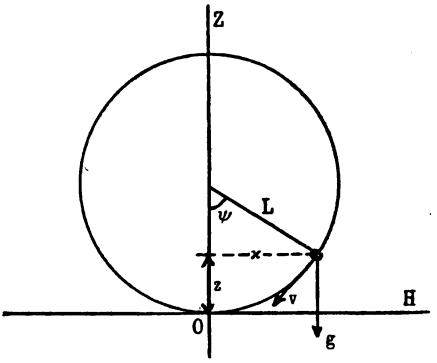
Freie Schwingungen des ebenen Pendels, dargestellt durch elliptische Funktionen.

Um zu einem Urteil zu gelangen, wie weit die Kontrolle unserer Rechnungsergebnisse durch Versuche am Kreispendel gerechtfertigt ist, muß man die Lösung der bekannten Differentialgleichung großer freier Pendelschwingungen

$$L\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\sin\psi = 0 \quad 1)$$

heranziehen.

Fig. 21.



Weierstrass hat diesen Fall als Spezialfall des sphärischen Pendels dargestellt; ebenso ist es bei den mir bekannten Abhandlungen späterer Autoren.

H. A. Schwarz hat die Differentialgleichung direkt und in sehr übersichtlicher Weise in seinen Vorlesungen behandelt, so daß ich glaube, manchem Fachgenossen einen Dienst zu erweisen, wenn ich, mit freundlicher Genehmigung des Herrn Geheimrat H. A. Schwarz, die Behandlung in Kürze wiedergebe.

Durch Multiplikation mit $2\frac{d\psi}{dt}$ und Integration erhält man aus Gleichung 1) das erste Integral

$$L\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - 2g\cos\psi = \text{Const.} \qquad 1a)$$

Oder mit $L\frac{d\psi}{dt} = v$

$$v^2 = C + 2gL\cos\psi \qquad 2)$$

Die Konstante C bestimmt sich aus der Bedingung

$$v = v_0 \text{ für } t = 0, \quad \psi = 0.$$

Digitized by Google

Wir führen an Stelle der Geschwindigkeit v_0 im tiefsten Punkte die Geschwindigkeitshöhe $H = \frac{v_0^2}{2g}$ ein und erhalten

$$C = 2g(H - L).$$

Die Gleichung 2) geht damit über in

$$v^2 = 2g(H - z) \tag{3}$$

mit Rücksicht auf die Beziehung $z = L(1 - \cos\psi)$. Aus letzterer ergibt sich noch

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2 &= L^2(1-\cos\psi)(1+\cos\psi)\\ &= z(2L - z)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Aus 3) folgt dann

$$L^2\left(\frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(H - z),$$

oder mit 4)

$$L^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(2L - z)(H - z).z \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung

$$z = 0 \text{ für } t = 0. \tag{6}$$

Hieraus erhält man unmittelbar die Integraldarstellung

$$t = \int_0^z \frac{L\,dz}{\sqrt{2g(z-2L)(z-H)z}} \tag{7}$$

Die Zeit erscheint als elliptisches Integral erster Art in Abhängigkeit von der Höhe z über dem tiefsten Punkt.

Um z als Funktion von t darzustellen, bringt man die Gleichung 5) auf die Weierstrasssche Normalform, was im vorliegenden Falle besonders einfach ist, da die rechte Seite schon in drei lineare Faktoren zerlegt ist.

Wir betrachten hier nur den Fall $H < 2L$ und setzen

$$\frac{H}{2L} = \sin^2\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Wir setzen dann

$$z - 2L = 2L(s - e_1),\ z - H = 2L(s - e_2),\ z = 2L(s - e_3), \tag{9}$$

wo über die Größen e_1, e_2, e_3 so verfügt werden soll, daß

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \tag{10}$$

ist.

Digitized by Google

Durch Addition der drei Gleichungen 9) folgt mit Rücksicht auf 10):

$$3z - 2L - H = 2L.3s \quad \text{oder} \quad s = \frac{3z - 2L - H}{6L} \qquad 11)$$

Ferner folgt aus 9):

$$\left.\begin{aligned} e_1 - e_3 &= 1 & e_1 &= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{H}{2L}\right) \\ e_2 - e_3 &= \frac{H}{2L} = \sin^2\alpha \quad \text{und} & e_2 &= \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{H}{L}\right) \\ e_1 - e_2 &= 1 - \frac{H}{2L} = \cos^2\alpha & e_3 &= \frac{1}{3}\left(-1 - \frac{H}{2L}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Die reellen Größen e_1, e_2, e_3 sind demnach schon so (bezüglich der Indizes 1, 2, 3) gewählt, daß sie in die Formeln des Art. 45 (Schwarz F.) unmittelbar eingesetzt werden können.

Durch Einführung der neuen Variabeln

$$u = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t \qquad 13)$$

erhält man aus 5) die Weierstrasssche Normalform

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) \qquad 14)$$

mit der Anfangsbedingung

$$z = 0 \quad \text{oder} \quad s = e_3 \quad \text{für} \quad u = 0.$$

Das allgemeine Integral von 14) ist

$$s = \wp(u + C),$$

wo $e_3 = \wp(C)$ sein muß.

Dieser letzteren Bedingung genügt $C = \omega_3$, so daß sich schließlich ergibt:

$$s = \wp(u + \omega_3) \qquad 15)$$

Damit ist aber auch gemäß 9) und 13) z als Funktion von t bestimmt.

Da u seiner Bedeutung nach [13)] nur reelle Werte annimmt, bleibt das Argument der $\wp$-Funktion auf einer Geraden der u-Ebene, die durch den Punkt ω_3 parallel zur Achse der Reellen läuft. Der Wert von s bleibt daher stets innerhalb der Grenzen e_3 und e_2 und der Wert von z innerhalb der Grenzen 0 und H.

Nach 9) ist

$$z = 2L[\wp(u + \omega_3) - e_3].$$

Digitized by Google

Nun ist nach Art. 19, 5 (Schwarz F.)

$$\wp(u+\omega_3)-e_3=\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{\wp u-e_3}=\frac{\sin^2\alpha}{\wp u-e_3},$$

daher

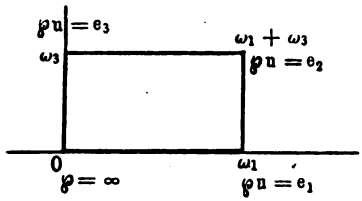
$$z=\frac{2L\sin^2\alpha}{\wp u-e_3}=\frac{H}{\wp u-e_3}.$$

Nach Art. 24 (Schwarz F.) folgt hieraus schließlich:

$$z=2L\sin^2\alpha\left(\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}\right)^2 \qquad 16)$$

in der einfachen Darstellung durch den Quotienten zweier für jeden endlichen Wert des Argumentes konvergierenden Potenzreihen. Erst bei der numerischen Berechnung bringt es Vorteile, an Stelle der σ-Funktionen die ϑ einzuführen. (Dieser Umstand ist darin begründet, daß zu allen äquivalenten Periodenpaaren nur eine einzige σ-Funktion gehört, während die ϑ von der Wahl des Periodenpaares abhängig sind.)

Fig. 22.



Läuft die Variable u von ω_3 nach $\omega_2=\omega_1+\omega_3$, so wächst z von Null beginnend bis zum Maximalwert H. Die Änderung von u entspricht daher einer Änderung von t um $\frac{1}{4}T$, wo T die Schwingungszeit des Pendels bedeutet. Es ergibt sich daher

$$T=4\sqrt{\frac{L}{g}}(\omega_2-\omega_3)=4\,\omega_1\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad 17)$$

Soll die Abszisse x explicite als Funktion von u dargestellt werden, so führe man 16) in die Formel

$$x=L\sin\psi\,z\sqrt{L^2(1-\cos\psi)(1+\cos\psi)}=\sqrt{z(2L-z)}$$

ein. Man erhält

$$x=\sqrt{2L\sin^2\alpha\frac{\sigma^2u}{{\sigma_3}^2u}\cdot 2L\left(1-\sin^2\alpha\frac{\sigma^2u}{{\sigma_3}^2u}\right)}.$$

Nach Art. 24 (Schwarz F.) ist

$$1-\sin^2\alpha\frac{\sigma^2u}{{\sigma_3}^2u}=\frac{{\sigma_3}^2u-(e_2-e_3)\sigma^2u}{{\sigma_3}^2u}=\frac{{\sigma_2}^2u}{{\sigma_3}^2u}.$$

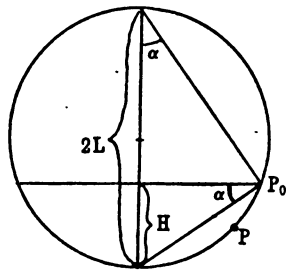
Digitized by Google

Daher

$$x = 2L \sin\alpha \frac{\sigma u \sigma_2 u}{\sigma_3^2 u}. \qquad 18)$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist so gewählt, daß für kleine wachsende u auch x wächst. Eine nähere Diskussion zeigt, daß das gewählte Vorzeichen bei 18) für den ganzen Verlauf von u richtig bleibt.

Fig. 23.



Die Bedeutung des Winkels α geht ohne weiteres aus Fig. 23 hervor, es ist

$$\sin\alpha = \frac{OP_0}{2L} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{H}{OP_0},$$

$$\text{also} \quad \sin^2\alpha = \frac{H}{2L}.$$

Jetzt kann die numerische Behandlung nach den Formeln 3) bis 17), Art. 45 (Schwarz F.) einsetzen. Zunächst muß die Größe l möglichst scharf bestimmt werden:

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} \qquad \begin{matrix} e_1 - e_3 = 1 \\ e_1 - e_2 = \cos^2\alpha, \end{matrix}$$

daher

$$l = \frac{1 - \sqrt{\cos\alpha}}{1 + \sqrt{\cos\alpha}}.$$

Für die logarithmische Berechnung führe man den Hilfswinkel β ein, derart, daß

$$\sqrt{\cos\alpha} = \cos\beta,$$

dann ist

$$l = \frac{1 - \cos\beta}{1 + \cos\beta} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

Von der Reihe für

$$h = e^{\tau\pi i} = \frac{1}{2}l + 2\left(\frac{1}{2}l\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}l\right)^9 + \cdots$$

sind in den meisten Fällen nur zwei Glieder erforderlich.

Formel 4), Art. 45) (Schwarz F.) ergibt dann

$$2\omega_1 = \frac{4\pi}{(1 + \sqrt{\cos\alpha})^2}[1 + 2h^4 + \cdots]^2,$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos^4\left(\frac{\beta}{2}\right)}[1 + 2h^4 + \cdots]^2,$$

womit T nach 17) bestimmt werden kann.

Digitized by Google

Wie hieraus zu ersehen, ist die Integration der Gleichung 1) durch die Weierstrassschen Funktionen außerordentlich einfach und elegant und die schließliche numerische Rechnung infolge der starken Konvergenz der ϑ-Reihen sehr bequem.

Zur vollständigen Integration der erweiterten Gleichung 1) von der Form

$$L\frac{d^2\psi}{dt^2} + g\sin\psi = c$$

dürfte sich die Erforschung neuer Funktionen als notwendig erweisen, wie es nach der Form des ersten Integrals

$$L\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - g\cos\psi - 2c\psi = \text{Const}$$

den Anschein hat.

Anhang V.

Näherungsprozeß auf Grund des Verfahrens von W. Ritz[1]).

In seiner bekannten Arbeit „Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik" hat Walter Ritz, Göttingen[2]), sein Verfahren auch auf die genäherte Lösung homogener linearer Differentialgleichungen ausgedehnt und hierfür den Konvergenzbeweis geleistet.

In der Schlußbemerkung dieses Abschnittes, S. 57, ist darauf hingewiesen, daß die Methode unverändert auf nicht homogene lineare Differentialgleichungen angewendet werden kann.

In § 16 heißt es dann: „Wir wollen für den Fall der schwingenden Saite zeigen, daß, wenn auch der theoretische Konvergenzbeweis, wenigstens in der im obigen dargestellten Form, versagt, die Methode nichtsdestoweniger anwendbar bleibt und zu numerisch sehr brauchbaren Resultaten führt."

Diese Ausführungen von Ritz ermutigen zur Anwendung seines Verfahrens auch auf unser Problem, wenngleich auch dadurch das Gelingen des Konvergenzbeweises kaum näher gerückt

---

[1]) Den Hinweis auf die Möglichkeit der Benutzung der Methode von Ritz zur Aufstellung des Näherungsprozesses verdanke ich Prof. Dr. A. Korn, Charlottenburg.

[2]) Journ. f. reine u. angew. Math., Bd. 135, S. 52 (1908).

Digitized by Google

wird. Die Grundlage liefert hier das Hamiltonsche Prinzip in der Form

$$\int_{t_1}^{t} dt \{\delta(T-U)+\Sigma X\delta x\} = 0. \qquad 1)$$

Hierin bedeuten T die kinetische, U die potentielle Energie unseres Systems und X die von der Zeit abhängige äußere Kraft $k\sin\omega t$.

Anfangs- und Endlage des Systems sowie die Zeit werden nicht variiert.

Wir behandeln zunächst den symmetrischen Fall. Die Maße unseres benutzten Punktes nehmen wir gleich 1 an, so daß

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2. \qquad 2)$$

Die Restitutionskraft $\alpha x - \gamma x^3$ ergibt

$$U = +\int_0^x (\alpha x - \gamma x^3) dx = +\alpha\frac{x^2}{2} - \gamma\frac{x^4}{4}, \qquad 3)$$

so daß man aus 1) erhält

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \alpha\frac{x^2}{2} + \gamma\frac{x^4}{4} + k\sin\omega t\cdot x\right\} = 0. \qquad 4)$$

Der Gedanke von Ritz ist nun, passende Näherungslösungen für x zu wählen und gewisse willkürliche Parameter darin so zu bestimmen, daß das Integral in 4), das wir mit J bezeichnen wollen, zu einem Extremum wird.

Die Regeln der Variationsrechnung ergeben aus 4) wieder unsere Differentialgleichung der Bewegung 24) auf S. 31.

Wählen wir als Näherungsfunktion

$$x = A\sin\omega t \qquad 5)$$

und setzen $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, so erhält man die feste Anfangslage $x_0 = 0$ und Endlage $x_1 = 0$.

Durch Einsetzen von 5) in den Ausdruck von J erhalten wir nach einer einfachen Rechnung

$$J = \frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{\omega^2}{4}A^2 - \frac{\alpha}{4}A^2 + \frac{3}{32}\gamma A^4 + \frac{k}{2}A\right]. \qquad 6)$$

Digitized by Google

Die Bedingung für das Eintreten eines Extremums

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0$$

ergibt dann

$$\frac{\omega^2}{2} A - \frac{\alpha}{2} A + \frac{3}{8} \gamma A^3 + \frac{k}{2} = 0 \qquad 7)$$

oder

$$(\omega^2 - \alpha) A + \frac{3}{4} \gamma A^3 + k = 0 \qquad 8)$$

in völliger Übereinstimmung mit unserer Gleichung 36a) S. 40.

Wählt man als zweite Annäherung

$$x = A \sin \omega t + B \sin 3 \omega t \qquad 9)$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} J = &-\frac{\alpha}{4}[A^2 + B^2] \\ &+ \frac{\gamma}{4}\left[\frac{3}{8} A^4 - \frac{1}{2} A^3 B + \frac{3}{2} A^2 B^2 + \frac{3}{8} B^4\right] \\ &+ \frac{k}{2} A + \frac{\omega^2}{4}(A^2 + 9 B^2) \end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

und die Bedingungen

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial B} = 0$$

ergeben

$$\left.\begin{aligned} (\omega^2 - \alpha) A + \frac{3}{4} \gamma A^3 + k - \frac{3}{4} \gamma [A^2 B - 2 A B^2] &= 0 \\ (9\omega^2 - \alpha) B - \frac{\gamma}{4} A^3 \qquad + \frac{3}{4} \gamma [2 A^2 B + B^3] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 11)$$

Diese Gleichungen zur Bestimmung von A und B sind schon unbequem und bei den folgenden Näherungen trifft dies in noch höherem Maße zu. Das Ritzsche Verfahren und sein Konvergenzbeweis ist nur einfach, wenn J als eine definite quadratische Form der willkürlichen Parameter erscheint.

Die Aufstellung der Bedingung 8) auf Grund des hier dargelegten Gedankens erhöht die Zuversicht zu dem von uns S. 39 eingeschlagenen Wege.

Digitized by Google

Beim unsymmetrischen Fall wäre

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \alpha\frac{x^2}{2} + \beta\frac{x^3}{3} + k \sin \omega t \,.\, x \right\} \qquad 12)$$

zu einem Extremum zu machen.

Würde man hier wählen

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{2\pi}{\omega}, \quad x = A \sin \omega t,$$

also

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,$$

so wären alle Bedingungen des Problems erfüllt, und trotzdem ergibt die Minimalbedingung das falsche Resultat

$$(\omega^2 - \alpha) A + k = 0.$$

Dies rührt daher, daß bei dem unsymmetrischen Kraftfelde die Annäherungsfunktion keine symmetrische Bewegung ergeben darf.

Die Annäherungsfunktion muß also die Form

$$x = A \sin \omega t + B \qquad 13)$$

erhalten.

Bei dieser Form und $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, wird

$$x_0 = B, \quad x_1 = B,$$

die Endlagen sind also nicht mehr fest, sondern variieren mit B Es ist also in unserem Falle $\delta x_0 = \delta x_1$ die Bedingung für die Variation der Endlagen.

Nun ist allgemein, wenn

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt$$

und t nicht variiert wird,

$$\delta J = \left[f_{\dot{x}} \delta x \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \right] \delta x \, dt,$$

wo

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_{\dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \dot{x}.$$

Daher verschwindet auch bei diesen Grenzbedingungen der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer und das Bestehen der Differentialgleichung der Bewegung hat zur Folge $\delta J = 0$.

Digitized by Google

Die Ausführung der einfachen Rechnung ergibt

$$\frac{\omega}{2\pi} J = -\frac{\alpha}{2}\left[\frac{A^2}{2} + B^2\right] + \frac{\beta}{3}\left[\frac{3}{2} A^2 B + B^3\right] + \frac{k}{2} A + \frac{\omega^2}{4} A^2.$$

Aus

$$\frac{\partial J}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial B} = 0$$

folgt dann

$$\left.\begin{aligned} (\omega^2 - \alpha) A + 2\beta A B + k &= 0, \\ \beta\left(\frac{A^2}{2} + B^2\right) - \alpha B &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 14)$$

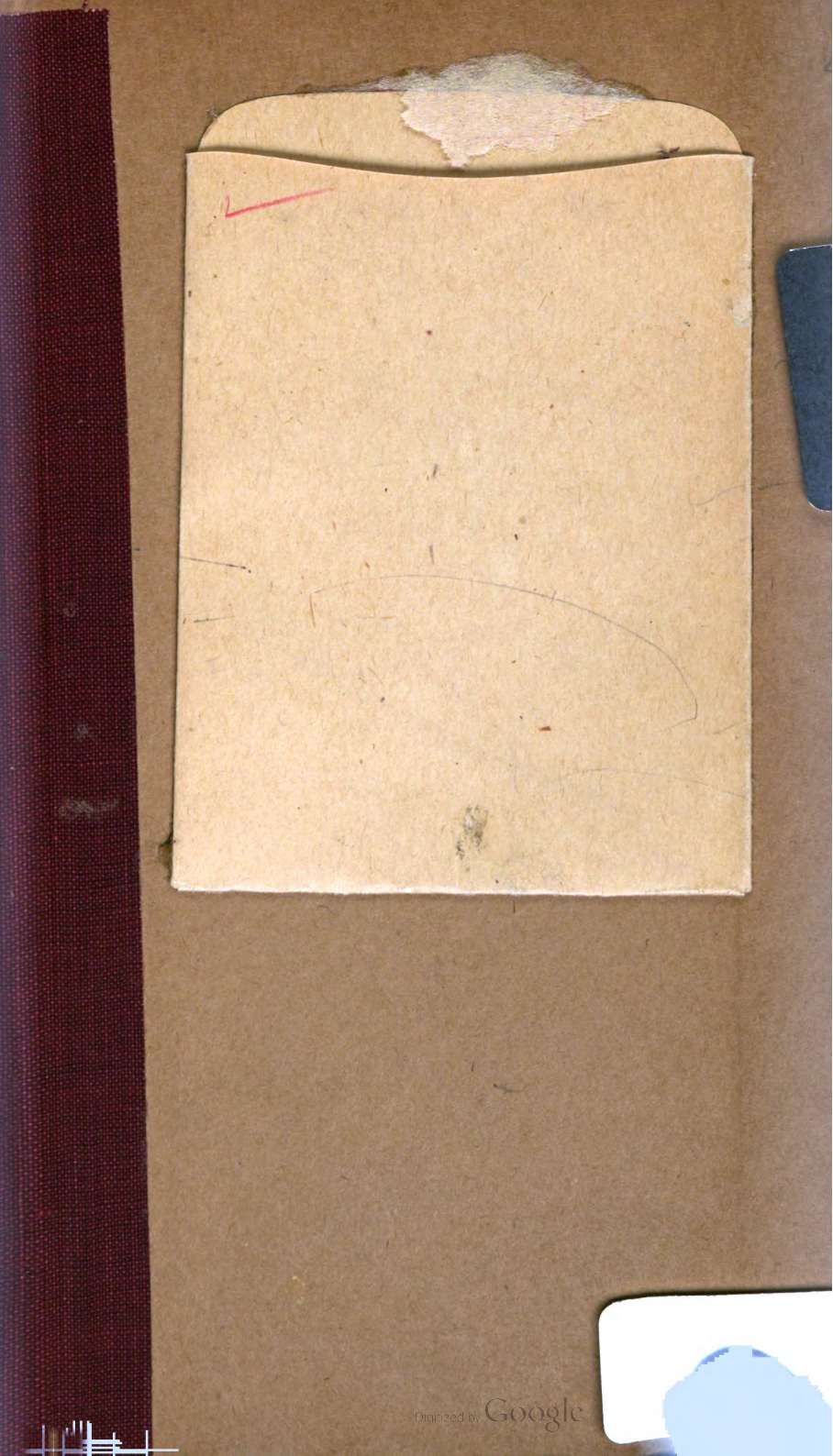
Auch dieses Resultat befindet sich in Übereinstimmung mit Gleichung 57) und 55), S. 52.

Digitized by Google

Digitized by Google

B89080439300
B89080439300A

Digitized by Google


Digitized by Google

89080439300

b89080439300a

Bisher erschienene

Sammlung V

ferner:

Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-G *stellung von Legierungen aus wä.* bildungen. M. 2,4

Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz.* Mit 22 A bildungen. M. 3,2

Heft 21. Prof. Dr. Bruno Glatzel-Berlin: *Elektrische Methoden der Momentphotographie.* Mit dem Bild des Verfassers und 51 A bildungen. M. 3,6

Heft 22. Prof. Dr. med. et phil. Carl Oppenheimer-Berlin: *Stof wechselfermente.* M. 2,80

Heft 23. Dr. Alfred Wegener-Marburg: *Die Entstehung der Kontinen und Ozeane.* Mit 20 Abbildungen. M. 3,2

Heft 24. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Die Härtung der Fet* Mit 4 Abbildungen. M. 3,—

Heft 25. Prof. Dr. A. Wassmuth-Graz: *Grundlagen und Anwendunge der statistischen Mechanik.* Mit 4 Abbildungen. M. 2,8

Heft 26. Dr. A. Lipschütz-Bern: *Zur allgemeinen Physiologie de Hungers.* Mit 39 Abbildungen. M. 3,—

Heft 27. Prof. Dr. C. Doelter-Wien: *Die Farben der Mineralien, in besondere der Edelsteine.* Mit 2 Abbildungen. M. 3,—

Heft 28. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Neuere Gerbemethode und Gerbetheorien.* M. 4,—

Heft 29. Dr. Erik Hägglund-Bergvik (Schweden): *Die Sulfitablaug und ihre Verarbeitung auf Alkohol.* Mit 6 Abbild. M. 2,—

Heft 30. Dr. techn. M. Vidmar-Laibach: *Moderne Transformatoren fragen.* Mit 10 Abbildungen. M. 2,8

Heft 31. Dr. Heinr. Faßbender-Berlin: *Die technischen Grundlage der Elektromedizin.* Mit 77 Abbildungen. M. 3,2

Heft 32/33. Prof. Rudolf Richter-Karlsruhe: *Elektrische Maschine mit Wicklungen aus Aluminium, Zink und Eisen.* Mit 51 Abbild M. 6,—

Heft 34. Obering. Carl Beckmann-Berlin-Lankwitz: *Haus- und Geschäfts-Telephonanlagen.* Mit 78 Abbildungen. M. 3,—

Heft 35. Dr. Aloys Müller-Bonn: *Theorie der Gezeitenkräfte.* Mi 17 Abbildungen. M. 2,8

Heft 36. Prof. Dr. W. Kummer-Zürich: *Die Wahl der Stromart fü größere elektrische Bahnen.* Mit 7 Abbildungen. M. 2,80

Heft 37. Dr. Reinhold Rieke-Charlottenburg: *Die Arbeitsmethode der Silikatchemie.* Mit 4 Abbildungen. M. 3,6

Heft 38. Prof. Dr. A. Einstein: *Über die spezielle und die allgemein Relativitätstheorie. (Gemeinverständlich.)* Mit 3 Abbildungen. 2. (unveränd.) Auflage. M. 2,8

Heft 39/40. Dr. Richard Grammel-Danzig: *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges.* Mit 83 Abbildungen. Mk. 5,6

Heft 41/42. Ingenieur Georg Duffing-Berlin: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technisch Bedeutung.* Mit 23 Abbildungen. Mk. 5,—.

Die genannten Preise erhöhen sich um den Teuerungs-Zuschlag.

Digitized by Google